

الدكتور
عمران قوبا

الجبر الخسفي

الطبعة الأولى

١٤١٩ - ١٤٢٠ هـ

١٩٩٨ - ١٩٩٩ م

دمشق



من

الدكتور
عمران قوربا

الجبر الخطي

العام الدراسي
1999-1998

حقوق التأليف والطبع والنشر محفوظة لجامعة دمشق

مقدمة

لقد نشأ الجبر الخطي من دراسة حل المعادلات الخطية، التي بدأها LEIBNITZ في عام ١٦٧٨ ثم تابعها MACLAURIN فأعطى العلاقات التي تسمح بحل معادلات الخطية بمجهولين وثلاثة مجاهيل عام ١٧٤٨. وأكمل CRAMER دراسة الحالة العامة في عام ١٧٥٤. ثم جاءت، انطلاقاً من الدراسات السابقة، فكرة تعريف المُحدّد من المرتبة n وذلك بالتدريج على n عن طريق نشر الخدّد وفق سطر أو عمود، لكلٍ من VANDERMONDE و LAPLACE. ومن جهة أخرى، اعتمد GAUSS في كتابه "Recherches Arithmétiques" رمزاً في هيئة جدولٍ للدلالة على تحويل خطي، فظهر مفهوم المصفوفة، ثم عرّف GAUSS المصفوفات. وهذا ما سمح للعالم CAUCHY باكتشاف قاعدة جداء مُحدّدين التي نشرها في أطروحة عام ١٨١٥.

وبقي مفهوما المصفوفة واخذت متلازمين جداً في أذهان علماء الرياضيات، مدةً من الزمن. وفي عام ١٨٢٦ عرّف CAUCHY كثير الحدود المميّز لمصفوفة، وذلك في دراسته للمحاور الأساسية لسطح من الدرجة الثانية. ثم تطوّرت نظرية المصفوفات في منتصف القرن التاسع عشر على يد كلٍّ من CAYLEY و SYLVESTER. وأصبحت المفاهيم الجديدة متعارفة ومألوفة أكثر فأكثر، وهذا ما أتاح المجال لظهور مفهوم الفضاء الشعاعي الذي له n بُعداً، والذي تحدّث عنه لأول مرة كلٌّ من CAYLEY و GRASSMAN في الأعوام ١٨٤٣-١٨٤٥، وأخيراً قام PEANO في عام ١٨٨٨ بصياغة التعاريف النهائية، المبنيّة على موضوعات أولية، للجبر الخطي.

بقيت وجهة النظر المصفوفية المبنيّة على حل الإحداثيات مهمة على الجبر الخطي حتى الثلاثينيات من هذا القرن، ثم أخذت النظرة الهندسية الحديثة، القائمة على الفضاءات الشعاعية والتطبيقات الخطية، تؤدّي دورها أكثر فأكثر بسبب عموميتها واستقلالها عن الجمل الإحداثية.

فيما يلي عَرَضٌ لفحوى هذا الكتاب:

- ❖ يتضمّن الفصل الأول التعاريف الأساسية في الفضاءات الشعاعية والتطبيقات الخطية.
 - ❖ ويدرس الفصل الثاني مسألة البعد في الفضاءات الشعاعية، و بوجه خاص الفضاءات الشعاعية ذات الأبعاد المنتهية.
 - ❖ ويعالج الفصل الثالث الأشكال الخطية على فضاء شعاعي، والتوحيّة في الفضاءات الشعاعية.
 - ❖ ويتصدّى الفصل الرابع لدراسة المصفوفات، والعمليات عليها، وخواصها ، ثمّ علاقتها بالتطبيقات الخطية.
 - ❖ ويعرض الفصل الخامس مفهوم المحدّدات، وحسابها، وحلّ جمل المعادلات الخطية.
 - ❖ ويشتمل الفصل السادس على دراسة اختزال التطبيقات الخطية، أي إمكان تمثيلها بمصفوفات قطرية أو متلّية.
 - ❖ وأخيراً نجد في الفصل السابع الفضاءات الشعاعية المزوّدة بجداء سلّمي، وهي بنى غنيّة جداً، تتلازم فيها دراسة الجبر مع دراسة التحليل، فتعطي العديد من النظريات الهامّة. ونفترض عند دراسة هذا الفصل أنّ القارئ على دراية بالفضاءات الشعاعية المنظّمة.
- هذا ويتبع كل فصل من فصول الكتاب مجموعة من التمرينات المتباينة في درجات صعوبتها، والتي تهدف إلى مساعدة الطالب على اكتساب المهارات اللازمة، واستيعاب المفاهيم المدروسة
- ختاماً، أُرْجى الشكر لجميع الزملاء الذين ساهموا في إخراج هذا الكتاب إلى النور، وأعرب سلفاً عن شكري لكل زميل يُبدي ملاحظة أو انتقاداً بتأيين على فحوى هذا الكتاب.

الفصل الأول

الفضاءات الشعاعية والتطبيقات الخطية

1.1.1. عموميات

1.1.1. تعريف: لتكن E مجموعة غير خالية، وليكن IK حقلاً تبديلياً. نفترض أن المجموعة

E مزودة بقانوني تشكيل أولهما داخلي: $E \times E \rightarrow E : (x, y) \mapsto x + y$ وثانيهما خارجي: $E \times E \rightarrow E : (\lambda, x) \mapsto \lambda \cdot x$. نقول إن البنية $(E, +, \cdot)$ فضاءً شعاعياً على الحقل التبديلي IK ، إذا وفقط إذا تحققت الشروط:

1. البنية $(E, +)$ زمرة تبديلية.

2. يحقق قانون التشكيل الخارجي (\cdot) الخواص التالية:

i. أيًا كانت $x \in E$ ، فإن $1 \cdot x = x$.

ii. أيًا كانت $x \in E$ و $(\alpha, \beta) \in IK^2$ ، فإن $(\alpha + \beta) \cdot x = \alpha \cdot x + \beta \cdot x$.

iii. أيًا كانت $(x, y) \in E^2$ و $\alpha \in IK$ ، فإن $\alpha \cdot (x + y) = \alpha \cdot x + \alpha \cdot y$.

iv. أيًا كانت $x \in E$ و $(\alpha, \beta) \in IK^2$ ، فإن $(\alpha\beta) \cdot x = \alpha \cdot (\beta \cdot x)$.

نسمي عناصر E أشعة، ونسمي عناصر IK مؤثرات سلمية.

1.1.2. أمثلة:

< ليكن IK حقلاً تبديلياً ولتكن $n \leq 1$. تكون المجموعة $E = IK^n$ مزودة بقانوني

التشكيل التاليين فضاءً شعاعياً على الحقل IK .

$$(x_1, \dots, x_n) + (y_1, \dots, y_n) = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n)$$

$$\lambda \cdot (x_1, \dots, x_n) = (\lambda x_1, \dots, \lambda x_n)$$

< بوجه أعم، إذا كان E فضاءً شعاعياً على حقل IK ، وكانت X مجموعة غير خالية،

كوت مجموعة التوابع التي منطلقها X ومستقرها E والتي نرمز إليها بالرمز

$\mathcal{F}(X, E)$ فضاءً شعاعياً على الحقل IK بالنسبة إلى القانونين المعرفين كما يلي:

$$\forall x \in X, \quad (f + g)(x) = f(x) + g(x)$$

$$\forall x \in X, \quad (\lambda \cdot f)(x) = \lambda \cdot f(x)$$

نسمي جماعة من عناصر E ، مجموعة أدلتها I ، أي عنصر من $\mathcal{F}(I, E)$ ، وعندئذ نرسم إلى هذا العنصر بالرمز $(x_i)_{i \in I}$ ، ونرسم إلى الفضاء $\mathcal{F}(I, E)$ بالرمز E^I .

< إذا كانت E_1, \dots, E_n فضاءات شعاعية على حقل \mathbb{K} ، فإن القانونين التاليين يجعلان من الجداء الديكارتي $F = E_1 \times \dots \times E_n$ فضاءً شعاعياً على الحقل \mathbb{K} :

$$(x_1, \dots, x_n) + (y_1, \dots, y_n) = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n)$$

$$\lambda \cdot (x_1, \dots, x_n) = (\lambda x_1, \dots, \lambda x_n)$$

< تكون $\mathbb{K}[X]$ أي مجموعة كثيرات الحدود بمحول واحد على حقل \mathbb{K} ، فضاءً شعاعياً على الحقل \mathbb{K} ، بالنسبة إلى قانوني جمع كثيرات الحدود وضربها بعدد من \mathbb{K} .
لنذكر بعض الخواص البسيطة التي نترك إثباتها تمريناً للقارئ:

3-1.1. مبرهنة: لتكن E فضاءً شعاعياً على الحقل \mathbb{K} ، عندئذ أياً كان $x \in E$ و $\alpha \in \mathbb{K}$ لدينا:

$$1. 0_{\mathbb{K}} \cdot x = 0_E \text{ و } \alpha \cdot 0_E = 0_E$$

$$2. \text{ إذا كان } 0_E = \alpha \cdot x \text{ فإما أن يكون } 0_{\mathbb{K}} = \alpha \text{ أو } 0_E = x$$

$$3. \text{ وأخيراً: } (-\alpha) \cdot x = \alpha \cdot (-x) = -(\alpha x)$$

4-1.1. مبرهنة: ليكن $(E, +, \cdot)$ فضاءً شعاعياً على الحقل \mathbb{K} ، ولتكن F مجموعة جزئية من E . نقول إن F فضاءً شعاعياً جزئياً من E ، إذا وفقط إذا كان $F \neq \emptyset$ ، وكانت F مغلقة بالنسبة إلى قانوني التشكيل المعرفين على E . عندئذ تكون المجموعة F المزدودة بمقتضى قانوني التشكيل $(+)$ و (\cdot) إلى $F \times F$ و $\mathbb{K} \times F$ على التوالي، فضاءً شعاعياً على الحقل \mathbb{K} .

ويتحقق القارئ بسهولة صحة المبرهنة التالية:

5-1.1. مبرهنة: ليكن E فضاءً شعاعياً على الحقل \mathbb{K} ، ولتكن F مجموعة جزئية من E . عندئذ يكون F فضاءً شعاعياً جزئياً من E ، إذا وفقط إذا كان $F \neq \emptyset$ ، وتحقق الشرط:

$$\forall (x, y) \in F \times F, \quad \forall \lambda \in \mathbb{K}, \quad \lambda \cdot x + y \in F$$

يكون كل من $\{0_E\}$ و E فضاءً شعاعياً جزئياً من E . ونسميها الفضاءين الجزئيين التافهين.

6-1.1 أمثلة:

« ليكن \mathbb{K} حقلاً تبديلياً ولتكن $n \in \mathbb{N}$. عندئذ تكون المجموعة

$$\mathbb{K}_n[X] = \{P \in \mathbb{K}[X] : \deg P \leq n\}$$

فضاء شعاعياً جزئياً من $\mathbb{K}[X]$.

« إذا كانت I مجموعة غير خالية، وكان \mathbb{K} حقلاً تبديلياً، كوّنت المجموعة

$$\mathbb{K}^{(I)} = \{(x_i)_{i \in I} : \text{Card}\{i \in I : x_i \neq 0\} < +\infty\}$$

فضاءً شعاعياً جزئياً من \mathbb{K}^I . نسمي أي عنصر من $\mathbb{K}^{(I)}$ جماعة شبه معدومة من

عناصر \mathbb{K} مجموعة أدلتها I . لاحظ أنّ $\mathbb{K}^{(I)} = \mathbb{K}^I$ إذا وفقط إذا كانت I مجموعة

منتهية. ولندكر أنّ فضاء كثيرات الحدود $\mathbb{K}[X]$ ما هو إلّا $\mathbb{K}^{(\mathbb{N})}$.

« وبوجه أعمّ، إذا كانت I مجموعة غير خالية، وكان E فضاء شعاعياً على حقل \mathbb{K} ،

كوّنت المجموعة $E^{(I)} = \{(x_i)_{i \in I} : \text{Card}\{i \in I : x_i \neq 0_E\} < +\infty\}$ فضاءً شعاعياً

جزئياً من $\mathcal{F}(I, E)$. نسمي أي عنصر من $E^{(I)}$ جماعة أشعة شبه معدومة من

عناصر E مجموعة أدلتها I .

7-1.1. مبرهنة: ليكن E فضاء شعاعياً على حقل \mathbb{K} ، ولتكن $(F_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ جماعة من الفضاءات

الشعاعية الجزئية من E . عندئذ يكون $F = \bigcap_{\lambda \in \Lambda} F_\lambda$ فضاء شعاعياً جزئياً من E .

الإثبات

□ الإثبات تحققّ مباشرةً من التعريف.

8-1.1. مبرهنة وتعريف: ليكن E فضاء شعاعياً على حقل \mathbb{K} ، ولتكن $(F_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ جماعة من

الفضاءات الشعاعية الجزئية من E . نسمي أصغر فضاء شعاعياً جزئياً من E يحوي

$\bigcup_{\lambda \in \Lambda} F_\lambda$ الفضاء الجزئي المؤكّد بـ $(F_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ ، ونرمز إليه بالرمز $\sum_{\lambda \in \Lambda} F_\lambda$. إنّ $\sum_{\lambda \in \Lambda} F_\lambda$ هو

تقاطع جميع الفضاءات الشعاعية الجزئية من E الحاوية $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} F_\lambda$ ، ويُعطى أيضاً بالعلاقة:

$$\sum_{\lambda \in \Lambda} F_\lambda = \left\{ \sum_{\lambda \in \Lambda} x_\lambda : (x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda} \in E^{(\Lambda)}, \forall \lambda \in \Lambda, x_\lambda \in F_\lambda \right\}$$

* بالنسبة إلى علاقة الاحتراء.

9-1.1. ملاحظة: إذا كانت $\Lambda = \mathbb{I}N_n = \{1, \dots, n\}$ وكانت F_1, F_2, \dots, F_n فضاءات شعاعية

جزئية من E كتبنا $F_1 + F_2 + \dots + F_n$ أو $\sum_{k=1}^n F_k$ للدلالة على الفضاء الشعاعي المولّد بـ $\bigcup_{k=1}^n F_k$ ، ويكون: $\sum_{k=1}^n F_k = \{x_1 + \dots + x_n : \forall k \in \mathbb{I}N_n, x_k \in F_k\}$.

2.1. التطبيقات الخطية

1-2.1. تعريف: ليكن E و F فضاءين شعاعيين على الحقل التبادلي \mathbb{K} ، نقول عن تطبيق

$$u : E \rightarrow F \text{ أنه خطي إذا وفقط إذا تحقّق الشرط}$$

$$\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall (x, y) \in E \times E, \quad u(\lambda \cdot x + y) = \lambda \cdot u(x) + u(y)$$

ونرمز بالرمز $\mathcal{L}(E, F)$ إلى مجموعة التطبيقات الخطية التي منطلقها E ومستقرها F .

وهي فضاء شعاعي جزئي من $\mathcal{F}(E, F)$ فضاء التتابع التي منطلقها E ومستقرها F .

وإذا كان u تطبيقاً من $\mathcal{L}(E, F)$ فإننا نرمز بالرمز $\ker u$ إلى نواته أي إلى المجموعة

$$\{0\}^{u^{-1}}, \text{ ونرمز بالرمز } \operatorname{Im} u \text{ إلى صورة التطبيق } u \text{ أي } u(E).$$

إن كل من $\ker u$ و $\operatorname{Im} u$ فضاء شعاعي جزئي، وهذا ناتج من المبرهنة التالية :

2-2.1. مبرهنة: ليكن E و F فضاءين شعاعيين على \mathbb{K} ، وليكن u تطبيقاً خطياً من $\mathcal{L}(E, F)$.

وليكن E_1 و F_1 فضاءين شعاعيين جزئيين من E و F على التوالي. عندئذ يكون $u(E_1)$

$$\text{و } u^{-1}(F_1) \text{ فضاءين شعاعيين جزئيين من } E \text{ و } F \text{ على التوالي.}$$

الإثبات

ليكن y_1 و y_2 عنصرين من $u(E_1)$. عندئذ يوجد عنصران x_1 و x_2 من E_1 . بحيث

$$u(x_1) = y_1 \text{ و } u(x_2) = y_2, \text{ ومن ثمّ أيّاً كانت } \lambda \in \mathbb{K} \text{ لدينا}$$

$$\lambda \cdot y_1 + y_2 = u(\underbrace{\lambda \cdot x_1 + x_2}_{\in E_1}) \in u(E_1)$$

ومنه $u(E_1)$ فضاء شعاعي جزئي من E .

وكذلك ليكن x_1 و x_2 عنصرين من $u^{-1}(F_1)$. عندئذ أيّاً كانت $\lambda \in \mathbb{K}$ لدينا

$$u(\lambda \cdot x_1 + x_2) = \lambda \cdot u(x_1) + u(x_2) \in F_1$$

ومن ثمّ $\lambda \cdot x_1 + x_2 \in u^{-1}(F_1)$.

□

3-2.I. مبرهنة: ليكن E و F فضاءين شعاعيين على \mathbb{K} ، وليكن u تطبيقاً خطياً من $\mathcal{L}(E, F)$. عندئذ يكون u متبايناً إذا وفقط إذا كان $\ker u = \{0_E\}$.

الإثبات

إن هذا التكافؤ واضح لأنه، أيّاً كان $(x, y) \in E \times E$ ، فإن

$$\square \quad u(x) = u(y) \Leftrightarrow u(x - y) = 0 \Leftrightarrow x - y \in \ker u$$

المبرهنة التالية واضحة.

4-2.I. مبرهنة: لتكن E و F و G فضاءات شعاعية على \mathbb{K} ، وليكن u من $\mathcal{L}(E, F)$ و v من $\mathcal{L}(F, G)$. عندئذ يكون $v \circ u$ تطبيقاً خطياً من $\mathcal{L}(E, G)$.

5-2.I. ملاحظة: لقد جرت العادة أن نرمز بالرمز $\mathcal{L}(E)$ إلى الفضاء $\mathcal{L}(E, E)$ ، وهو يكون جبراً على الحقل \mathbb{K} بالنسبة إلى القوانين $(+, \cdot, 0)$ ويكون غير تبديلي في الحالة العامة.

6-2.I. تعريف: ليكن E فضاءً شعاعياً على الحقل التبديلي \mathbb{K} ، نرمز بالرمز $\mathcal{GL}(E)$ إلى مجموعة التقابلات الخطية من E إلى E ، وهي زمرة بالنسبة إلى قانون تركيب التطبيقات (\circ) . تُسمى الزمرة $(\mathcal{GL}(E), \circ)$ الزمرة الخطية على الفضاء E .

3.I. جماعات وجمل الأشعة

1-3.I. تعريف: ليكن E فضاءً شعاعياً على حقل تبديلي \mathbb{K} و $n \in \mathbb{N}^*$ ، ولتكن (x_1, \dots, x_n) جملة من عناصر E ⁴. لتأمل التطبيق الخطي

$$\Phi: \mathbb{K}^n \rightarrow E, (a_1, a_2, \dots, a_n) \mapsto \sum_{k=1}^n a_k x_k$$

حيث نسمي كل عنصر من النمط $\sum_{k=1}^n a_k x_k$ عبارة خطية بالجملة (x_1, \dots, x_n) .

ونسمي صورة التطبيق Φ ، الفضاء الشعاعي المولّد بالجملة (x_1, \dots, x_n) . ونكتب

$$\text{vect}((x_1, \dots, x_n)) = \text{Im } \Phi = \left\{ \sum_{k=1}^n a_k x_k : (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{K}^n \right\}$$

⁴ أي عنصراً من E^n .

نقول إنَّ الجملة (x_1, \dots, x_n) تولّد الفضاء E أو إنها جملة مولدة في E إذا وفقط إذا كان Φ غامراً، وهذا يكافئ قولنا إنه يمكن كتابة كل عنصر من E كمباراة خطيّة بالجملة (x_1, \dots, x_n) ، أو إنَّ $E = \text{vect}((x_1, \dots, x_n))$.
 ونقول إنَّ الجملة (x_1, \dots, x_n) حرة، أو مستقلة خطيّاً، إذا وفقط إذا كان Φ متبايناً، أي $\ker \Phi = \{0\}$ ، وهذا يكافئ الشرط:

$$\forall (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{K}^n, \left(\sum_{k=0}^n a_k x_k = 0 \right) \Rightarrow (a_1 = a_2 = \dots = a_n = 0)$$

ونقول إنَّ الجملة (x_1, \dots, x_n) مرتبطة خطيّاً إذا لم تكن حرة.
 وأخيراً نقول إنَّ الجملة (x_1, \dots, x_n) تُكوّن أساساً للفضاء E ، إذا وفقط إذا كان Φ تقابلاً، أي إذا وفقط إذا كانت الجملة (x_1, \dots, x_n) حرة ومولدة في آن معاً.

هذا ويمكننا تعميم هذا التعريف ليشمل جماعات الأشعة كما يلي:

2-3.I. تعريف: ليكن E فضاء شعاعياً على حقل تبديلي \mathbb{K} و I مجموعة غير خالية، ولنكن

$(x_i)_{i \in I}$ جماعة من عناصر E ⁴. ولتأقّل التطبيق الخطي

$$\Psi: \mathbb{K}^{(I)} \rightarrow E, (a_i)_{i \in I} \mapsto \sum_{i \in I} a_i x_i$$

حيث نلاحظ أن للمجموع السابق معنى، لأن الجماعة $(a_i)_{i \in I}$ شبه معدومة. وكما في السابق نسمّي صورة التطبيق Ψ ، الفضاء الشعاعي المولّد بالجماعة $(x_i)_{i \in I}$ ، ويكون

$$\text{vect}((x_i)_{i \in I}) = \left\{ \sum_{j \in J} a_j x_j : (J \text{ مجموعة جزئية منتهية من } I) \wedge (a_j)_{j \in J} \in \mathbb{K}^{(J)} \right\}$$

نقول إنَّ الجماعة $(x_i)_{i \in I}$ تولّد الفضاء E أو إنها جماعة مولدة في E إذا وفقط إذا كان Ψ غامراً، وهذا يكافئ قولنا إنه يمكن كتابة كل عنصر من E كمباراة خطيّة بجماعة جزئية منتهية من الجماعة $(x_i)_{i \in I}$ ، أو إنَّ $E = \text{vect}((x_i)_{i \in I})$.

ونقول الجماعة $(x_i)_{i \in I}$ جماعة حرة، أو مستقلة خطيّاً، إذا وفقط إذا كان Ψ متبايناً، أي $\ker \Psi = \{0\}$ ، وهذا يكافئ كون كل جماعة جزئية منتهية من الجماعة $(x_i)_{i \in I}$ حرة.
 ونقول إنَّ الجماعة $(x_i)_{i \in I}$ مرتبطة خطيّاً إذا لم تكن حرة.

⁴ أي عنصراً من E .

وأخيراً نقول إن الجماعة $(x_i)_{i \in I}$ تُكوّن أساساً للفضاء E ، إذا فقط إذا كان Ψ تقابلاً، أي إذا فقط إذا كانت الجماعة $(x_i)_{i \in I}$ حرة ومولدة في آن معاً.

نُدرج في المبرهنة التالية بعض الخواص البسيطة.

3-3.1. مبرهنة: ليكن E فضاءً شعاعياً على حقل تبديلي IK و I مجموعة غير خالية، ولتكن $(x_i)_{i \in I}$ جماعة من عناصر E .

1. إذا كانت $(x_i)_{i \in I}$ جماعة حرة، كانت كل جماعة $(x_i)_{i \in J}$ جزئية منها حرة أيضاً.
2. إذا كانت $(x_i)_{i \in I}$ جماعة حرة، كان $x_i \neq 0$ ، $\forall i \in I$ ، وكان التطبيق $i \mapsto x_i$ متبايناً.
3. إذا كانت $(x_i)_{i \in J}$ جماعة جزئية مرتبطة خطأً من الجماعة $(x_i)_{i \in I}$ ، كانت الجماعة $(x_i)_{i \in I}$ نفسها مرتبطة خطأً.
4. تكون الجماعة $(x_i)_{i \in I}$ مرتبطة خطأً إذا فقط إذا أمكن التعبير عن أحد الأشعة x_{i_0} كمباراة خطية بالجماعة $(x_i)_{i \in I \setminus \{i_0\}}$.

الإثبات

نحتفظ برموز التعريف السابق.

1. هذه النتيجة واضحة، لأن مقصور التطبيق المتباين Ψ إلى الفضاء الجزئي IK^J يكون متبايناً أيضاً.

2. الجملة المؤلفة من عنصر واحد هو 0 مرتبطة. وكذلك تكون كل جملة من النمط (x, x) . ونحصل على النتيجة المطلوبة باستخدام 1.

3. نتج هذه الخاصية من نفي الخاصية 1.

4. إذا كانت الجماعة $(x_i)_{i \in I}$ مرتبطة خطأً، أمكننا أن نجد جماعة $(a_i)_{i \in I}$ شبه معدومة وغير معدومة بحيث $\sum_{i \in I} a_i x_i = 0$. ولما كانت $(a_i)_{i \in I}$ غير معدومة، وجدّ عنصر $i_0 \in I$ بحيث

$$a_{i_0} \neq 0 \text{ ومن ثم } x_{i_0} = - \sum_{i \in I \setminus \{i_0\}} \frac{a_i}{a_{i_0}} x_i \text{ وبالعكس، إذا كان } x_{i_0} = \sum_{i \in I \setminus \{i_0\}} b_i x_i \text{ حيث}$$

$(b_i)_{i \in I \setminus \{i_0\}}$ جماعة شبه معدومة من IK ، وعرفنا الجماعة شبه المعدومة وغير المعدومة $(a_i)_{i \in I}$ بأن $a_{i_0} = 1$ و $a_i = -b_i$ ، $i \in I \setminus \{i_0\}$ ، كان $\sum_{i \in I} a_i x_i = 0$ ، والجماعة $(x_i)_{i \in I}$

□

مرتبطة.

4-3.I. أمثلة:

« ليكن $E = \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ فضاء التتابع الحقيقية المعرفة على \mathbb{R} . ونعرّف أياً كانت $\alpha \in \mathbb{R}$ التابع

$$f_\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto |x - \alpha|$$

عندئذ تكون الجماعة $(f_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{R}}$ حرة.

في الحقيقة، لو كانت هذه الجماعة مرتبطة لأمكن التعبير عن أحد العناصر، وليكن f_β مثلاً، كتراكيب خطي بالجماعة $(f_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{\beta\}}$. ومن ثمّ أمكننا إيجاد $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ من $\mathbb{R} \setminus \{\beta\}$ و $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ من \mathbb{R} بحيث

$$f_\beta = \sum_{k=1}^n \alpha_k f_{\alpha_k}$$

ولما كان $\beta \neq \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ كانت التتابع $(f_{\alpha_k})_{1 \leq k \leq n}$ قابلة للاشتقاق عند β ومن ثمّ كان f_β قابلاً للاشتقاق عند β وهذا تناقض واضح.

« ليكن $E = \mathbb{K}[X]$ فضاء كثيرات الحدود على الحقل التبادلي \mathbb{K} ، وليكن لدينا تطبيق متزايد تماماً $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ وجماعة $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ من $\mathbb{K}[X]$ بحيث $\deg P_n = \varphi(n)$. عندئذ تكون الجماعة $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ حرة. وفي الحالة الخاصة الموافقة لـ $\varphi(n) = n$ أياً كان $n \in \mathbb{N}$ ، تكون الجماعة $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ أساساً لـ E .

« ليكن \mathbb{K} حقلاً تبادلياً، ولتكن $n \in \mathbb{N}^*$. تكون الجملة $(e_k)_{1 \leq k \leq n}$ ، حيث e_k هو العنصر $(0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$ من \mathbb{K}^n ، أساساً للفضاء \mathbb{K}^n نسمة الأساس القانوني.

« ليكن \mathbb{K} حقلاً تبادلياً، ولتكن I مجموعة غير خالية. تكون الجماعة $(e_i)_{i \in I}$ ، حيث e_i هو العنصر $(\delta_{i,j})_{j \in I}$ من $\mathbb{K}^{(I)}$ ، و $\delta_{i,j}$ هو رمز كرونكر Kronecker الذي يساوي 1 عندما $j = i$ ويساوي 0 عندما $j \neq i$ ، أساساً للفضاء $\mathbb{K}^{(I)}$ نسمة الأساس القانوني.

5-3.I. مبرهنة: ليكن E و F فضاءين شعاعيين على حقل تبديلي \mathbb{K} و u تطبيقاً من $\mathcal{L}(E, F)$

ولتكن I مجموعة غير خالية، و $(x_i)_{i \in I}$ جماعة من عناصر E .

1. إذا كانت $(u(x_i))_{i \in I}$ جماعة حرة، كانت الجماعة $(x_i)_{i \in I}$ حرة أيضاً.

2. إذا كان u متيناً وكانت $(x_i)_{i \in I}$ جماعة حرة، كانت $(u(x_i))_{i \in I}$ جماعة حرة.

3. إذا كانت $(x_i)_{i \in I}$ جماعة مولدة، كان $\text{Im } u = u(E) = \text{vect}((u(x_i))_{i \in I})$.

الإثبات

□ الإثبات بسيطاً انطلاقاً من التعريف ونتركه تمريناً للقارئ.

6-3.I. مبرهنة: ليكن E و F فضاءين شعاعيين على حقل تبديلي \mathbb{K} . وليكن أساساً

لـ E ولتكن $(y_i)_{i \in I}$ جماعة من F . عندئذ يوجد تطبيق خطي وحيد u من $\mathcal{L}(E, F)$ من

$$\forall i \in I, \quad u(e_i) = y_i \quad \text{يُحقق}$$

الإثبات

نثبت أولاً الوحدةية. ليكن u و v تطبيقين خطيين من $\mathcal{L}(E, F)$ يحققان

$$\forall i \in I, \quad u(e_i) = y_i \quad \text{و} \quad \forall i \in I, \quad v(e_i) = y_i$$

عندئذ يكون $(u - v)(e_i) = 0 \quad \forall i \in I$ ، ومن ثم يكون $\{e_i : i \in I\} \subset \ker(u - v)$. ولما

كان $\ker(u - v)$ فضاءً شعاعياً جزئياً من E كان $E = \text{vect}((e_i)_{i \in I}) \subset \ker(u - v)$ ، ومنه

$$\text{ينتج أن } \forall x \in E, \quad (u - v)(x) = 0 \quad \text{وهذا يكافئ قولنا } u = v.$$

لإثبات الوجود، نتأمل التطبيقين الخطيين

$$\Psi : \mathbb{K}^{(I)} \rightarrow E : (a_i)_{i \in I} \mapsto \sum_{i \in I} a_i e_i$$

$$\Theta : \mathbb{K}^{(I)} \rightarrow F : (a_i)_{i \in I} \mapsto \sum_{i \in I} a_i y_i$$

إن Ψ تقابل خطي لأن $(e_i)_{i \in I}$ أساس لـ E ، ومن ثم يكون $u = \Theta \circ \Psi^{-1}$ تطبيقاً من $\mathcal{L}(E, F)$

□

ويعتق وضوحاً الشرط $\forall i \in I, \quad u(e_i) = y_i$.

4.1. المجموع المباشر والفضاءات المتنامة

1-4.1. تعريف: ليكن E فضاءً شعاعياً على حقل تبديلي IK . وليكن E_1 و E_2 فضاءين شعاعيين جزئيين من E . نقول إن الفضاء الشعاعي الجزئي $F = E_1 + E_2$ مجموع مباشر للفضاءين الجزئيين E_1 و E_2 ، ونكتب عندها $F = E_1 \oplus E_2$ ، إذا وفقط إذا تحقّق الشرط $\{0\} = E_1 \cap E_2$.

وبوجه عام، إذا كانت $(E_i)_{i \in I}$ جماعة من الفضاءات الشعاعية الجزئية من E ، نقول إن الفضاء الشعاعي الجزئي $F = \sum_{i \in I} E_i$ مجموع مباشر للجماعة $(E_i)_{i \in I}$ ، ونكتب عندها $F = \bigoplus_{i \in I} E_i$ ، إذا وفقط إذا تحقّق الشرط:

$$\forall i \in I, \quad E_i \cap \left(\sum_{j \in I \setminus \{i\}} E_j \right) = \{0\}$$

من المهم الإشارة هنا إلى أن الشرط السابق لا يكافئ قولنا $\{0\} = E_i \cap E_j$ وذلك أيّاً كان الدليلان المختلفان $(i, j) \in I^2$.

2-4.1. تعريف: ليكن E فضاءً شعاعياً على حقل تبديلي IK . وليكن E_1 و E_2 فضاءين شعاعيين جزئيين من E . نقول إن E_1 و E_2 متامان إذا وفقط إذا تحقّق الشرط $E = E_1 \oplus E_2$.

وبوجه عام، إذا كانت $(E_i)_{i \in I}$ جماعة من الفضاءات الشعاعية الجزئية من E ، نقول إن الجماعة $(E_i)_{i \in I}$ متامة إذا وفقط إذا تحقّق الشرط: $E = \bigoplus_{i \in I} E_i$.

3-4.1. مبرهنة: ليكن E فضاءً شعاعياً على حقل تبديلي IK . ولتكن $(E_i)_{i \in I}$ جماعة من الفضاءات الشعاعية الجزئية من E . عندئذ يكون الفضاء الجزئي $F = \sum_{i \in I} E_i$ مجموعاً مباشراً إذا وفقط إذا كانت جماعة معدومة كل جماعة شبه معدومة $(x_i)_{i \in I} \in E^{(I)}$ محققة للشرطين: $\sum_{i \in I} x_i = 0$ و $\forall i \in I, x_i \in E_i$. أي:

$$\forall (x_i)_{i \in I} \in E^{(I)}, \quad \left(\sum_{i \in I} x_i = 0 \right) \wedge (\forall i \in I, x_i \in E_i) \Rightarrow (\forall i \in I, x_i = 0)$$

الإثبات

لتفرض أولاً أن $F = \bigoplus_{i \in I} E_i$ ولكن $(x_i)_{i \in I} \in E^{(I)}$ جماعة شبه معدومة محققة للشرطين:

$$\sum_{i \in I} x_i = 0 \text{ و } \forall i \in I, x_i \in E_i$$

وليكن $I \ni k$. عندئذ يمكننا أن نكتب

$$x_k = \sum_{i \in I \setminus \{k\}} (-x_i) \in E_k \cap \left(\sum_{i \in I \setminus \{k\}} E_i \right) = \{0\}$$

ومن ثم $x_k = 0$. هذا ما بعث أن $\forall k \in I, x_k = 0$

وبالعكس، ليكن $I \ni k$ ، وليكن y عنصراً من $E_k \cap \left(\sum_{i \in I \setminus \{k\}} E_i \right)$. توجد عندئذ جماعة

شبه معدومة $(y_i)_{i \in I \setminus \{k\}}$ من $E^{I \setminus \{k\}}$ بحيث $y = \sum_{i \in I \setminus \{k\}} y_i$. نعرف إذن الجماعة شبه المعدومة

$(x_i)_{i \in I} \in E^{(I)}$ كما يلي:

$$x_i = \begin{cases} -y_i & : i \in I \setminus \{k\} \\ y & : i = k \end{cases}$$

فيكون $\sum_{i \in I} x_i = 0$ و $\forall i \in I, x_i \in E_i$. إذن يتبع من الفرض أن $x_k = 0$ ، ومن ثم

$$y = 0. \text{ نكون قد أثبتنا أن } \left\{ \sum_{i \in I \setminus \{k\}} E_i \right\} \cap E_k = \{0\} \text{ وذلك أيّاً كان } I \ni k. \quad \square$$

I.4-4. نتيجة: ليكن E فضاءً شعاعياً على حقل تبديلي \mathbb{K} . وليكن $(E_i)_{i \in I}$ جماعة من

الفضاءات الشعاعية الجزئية من E ، بحيث يكون الفضاء الجزئي $F = \sum_{i \in I} E_i$ مجموعاً

مباشراً. ولكن $(x_i)_{i \in I}$ جماعة من عناصر $E \setminus \{0\}$ تحقق الشرط

$\forall i \in I, x_i \in E_i$ عندئذ تكون $(x_i)_{i \in I}$ جماعة حرة.

الإثبات

لتكن $(a_i)_{i \in I}$ جماعة شبه معدومة من $\mathbb{K}^{(I)}$ ، بحيث $\sum_{i \in I} a_i x_i = 0$. فإذا عرفنا

$$y_i = a_i x_i \text{ أيّاً كانت } i \in I, \text{ حصلنا على جماعة } (y_i)_{i \in I} \in E^{(I)}, \text{ تحقق الشرطين } \sum_{i \in I} y_i = 0$$

و $\forall i \in I, y_i \in E_i$. ولما كان المجموع $F = \bigoplus_{i \in I} E_i$ مباشراً كان $\forall i \in I, y_i = a_i x_i = 0$

بمقتضى البرهنة السابقة، ولكن $\forall i \in I, x_i \neq 0$ إذن $\forall i \in I, a_i = 0$. \square

5-4.1. مبرهنة: ليكن E فضاء شعاعياً على حقل تبديلي IK . وليكن $(E_k)_{1 \leq k \leq n}$ جماعة منتهية

من الفضاءات الشعاعية الجزئية من E . يكون المجموع $F = E_1 + E_2 + \dots + E_n$ مجموعاً مباشراً، إذا وفقط إذا تحقق الشرط:

$$\forall k \in \{2, \dots, n\}, \quad E_k \cap (E_1 + \dots + E_{k-1}) = \{0\}$$

الإثبات

لتكن $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in E_1 \times E_2 \times \dots \times E_n$ بحيث $x_1 + x_2 + \dots + x_n = 0$. إذا كانت المجموعة $\mathcal{N} = \{j \in \mathbb{N}_n : x_j \neq 0\}$ غير خالية، عرفنا $k = \max \mathcal{N}$ ومن ثم يكون $\mathcal{N} \cap \{1, \dots, k-1\} = \emptyset$. إذن $x_k = -\sum_{i=1}^{k-1} x_i \in E_k \cap (E_1 + \dots + E_{k-1}) = \{0\}$ خالية أي: $\forall j \in \mathbb{N}_n, x_j = 0$. وهذا يثبت المطلوب استناداً إلى المبرهنة 3-4.1. \square

6-4.1. مبرهنة وتعريف: ليكن E فضاءً شعاعياً على حقل تبديلي IK . وليكن $(E_i)_{i \in I}$ جماعة

من الفضاءات الشعاعية الجزئية من E . تكون الجماعة $(E_i)_{i \in I}$ متامة، إذا وفقط إذا

تحقق الشرط: أيًا كان $x \in E$ توجد جماعة شبه معدومة وحيدة $(x_i)_{i \in I} \in E^{(I)}$ بحيث

$$x = \sum_{i \in I} x_i \quad \text{و} \quad \forall i \in I, x_i \in E_i$$

وإذا كانت الجماعة $(E_i)_{i \in I}$ جماعة متامة، وكان $I \ni i$ ، أسمينا التطبيق

$p_i : E \rightarrow E$ الذي يربط بالعنصر $x \in E$ العنصر x_i ، إسقاطاً للفضاء E على الفضاء

الجزئي E_i توازيًا مع الفضاء الجزئي E_j . $F_i = \bigoplus_{j \in I \setminus \{i\}} E_j$. ولتحقق جماعة التطبيقات $(p_i)_{i \in I}$

الخواص التالية:

1. أيًا كانت $I \ni i$ ، فالتطبيق p_i خطي.
2. أيًا كان الدليلان المختلفان $(i, j) \in I^2$ ، فإن $p_i \circ p_j = p_j \circ p_i$.
3. أيًا كانت $I \ni i$ ، فإن $p_i \circ p_i = p_i$.
4. أيًا كان $x \in E$ كانت الجماعة $(p_i(x))_{i \in I}$ شبه معدومة وكان $x = \sum_{i \in I} p_i(x)$.

ونعبر عن الخاصية الأخيرة بكتابة $I_E = \sum_{i \in I} p_i$

الإثبات

نفترض أولاً أن $E = \bigoplus_{i \in I} E_i$ ، وليكن $x \in E$. عندئذ نظراً إلى أن $E = \sum_{i \in I} E_i$ توجد جماعة شبه معدومة $E^{(I)} \ni (x_i)_{i \in I}$ بحيث $x_i \in E_i$ و $\forall i \in I$ ، $x = \sum_{i \in I} x_i$. وإذا كانت $E^{(I)} \ni (y_i)_{i \in I}$ جماعة أخرى شبه معدومة بحيث $y_i \in E_i$ و $\forall i \in I$ ، $x = \sum_{i \in I} y_i$ كانت الجماعة $E^{(I)} \ni (z_i)_{i \in I}$ ، حيث $z_i = x_i - y_i$ ، جماعة شبه معدومة مُحَقَّقة للشروطين:

$$\sum_{i \in I} z_i = 0 \quad \text{و} \quad \forall i \in I, z_i \in E_i$$

ومن ثم $\forall i \in I, z_i = 0$. بمقتضى المبرهنة 3.4.I، أي $x_i = y_i$.

ونترك الاقتضاء العاكس، وهو أبسط، تمريناً للقارئ.

لتكن $I \geq k$ ، ولنثبت أن التطبيق p_k خطي. لتكن $(x, y) \in E^2$. توجد جماعتان شبه معدومتين $E^{(I)} \ni (x_i)_{i \in I}$ و $E^{(I)} \ni (y_i)_{i \in I}$ بحيث يكون لدينا من جهة أولى: $\forall i \in I, x_i \in E_i$ و $x = \sum_{i \in I} x_i$ ، ومن جهة ثانية: $\forall i \in I, y_i \in E_i$ و $y = \sum_{i \in I} y_i$.

عندئذ أيما كانت $\lambda \in \mathbb{K}$ ، يَكُنْ

$$x + \lambda \cdot y = \sum_{i \in I} (x_i + \lambda \cdot y_i) \quad \text{و} \quad \forall i \in I, x_i + \lambda \cdot y_i \in E_i$$

ومن ثم $\mathcal{L}(E) \ni p_k(x + \lambda \cdot y) = x_k + \lambda \cdot y_k = p_k(x) + \lambda \cdot p_k(y)$.

لتكن $x \in E_k$ ، حيث $I \geq k$. ولنعرّف الجماعة شبه المعدومة $E^{(I)} \ni (x_i)_{i \in I}$ كما يلي:

$$x_i = \begin{cases} 0 & : i \in I \setminus \{k\} \\ x & : i = k \end{cases}$$

عندئذ يكون $x = \sum_{i \in I} x_i$ و $\forall i \in I, x_i \in E_i$ ولأن هذه الكتابة وحيدة نستنتج أن $p_k(x) = x$

وأن $p_i(x) = 0$ في حالة $i \neq k$.

ليكن $x \in E$ ولتكن $I \geq k$. عندئذ يكون $p_k(x)$ ومن المناقشة السابقة يكون $p_k(p_k(x)) = p_k(x)$ ، ويكون $p_i(p_k(x)) = 0$ في حالة $i \neq k$. وهذا يثبت الخصلتين 2.

و3. أمّا الخاصّة الأخيرة فهي واضحة من التعريف.

□

7-4.I. حالة خاصة: ليكن E فضاء شعاعياً على حقل تبديلي IK . وليكن E_1 و E_2 فضاءين شعاعيين جزئيين من E . يكون الفضاءان E_1 و E_2 متتامين، إذا وفقط إذا تحقق الشرط: أيًا كان $x \in E$ توجد ثنائية وحيدة $(x_1, x_2) \in E_1 \times E_2$ بحيث

$$x = x_1 + x_2$$

وإذا عرفنا $p_1 : E \rightarrow E, x \mapsto x_1$ و $p_2 : E \rightarrow E, x \mapsto x_2$ ، كان التطبيقان p_1 و p_2 خطيين وكان $p_2 \circ p_2 = p_2$ و $p_1 \circ p_1 = p_1$ و $p_1 \circ p_2 = p_2 \circ p_1 = 0$ وأخيراً $I = p_1 + p_2$. و يسمى p_1 الإسقاط الخطي لـ E على E_1 توازياً مع E_2 ، وكذلك يسمى p_2 الإسقاط الخطي لـ E على E_2 توازياً مع E_1 .

8-4.I. تعريف: ليكن E فضاء شعاعياً على حقل تبديلي IK . نقول عن تطبيق خطي p من $\mathcal{L}(E)$ إنه إسقاط إذا وفقط إذا كان $p \circ p = p$ ، (ونكتب أيضاً $p^2 = p$).

9-4.I. مبرهنة: ليكن E فضاء شعاعياً على حقل تبديلي IK . وليكن $p \in \mathcal{L}(E)$ إسقاطاً. عندئذ يوجد فضاءان شعاعيان جزئيان E_1 و E_2 من E بحيث يكون $E = E_1 \oplus E_2$ ، ويكون p هو الإسقاط الخطي لـ E على E_1 توازياً مع E_2 .

الإثبات

لنضع $E_2 = \ker p$ و $E_1 = \text{Im } p$.

إذا كان $x \in E_1 \cap E_2$ ، وجَد عنصر $y \in E$ بحيث $x = p(y)$ وكان $p(x) = 0$. وعندئذ يكون $0 = p(x) = p \circ p(y) = p(y) = x$. ومنه $E_1 \cap E_2 = \{0\}$.

ومن ناحية أخرى، إذا كان $x \in E$ كان $x = x_1 + x_2$ حيث $x_1 = p(x) \in E_1$ و $x_2 = x - p(x) \in E_2$ (لأن $p(x_2) = p(x) - p \circ p(x) = p(x) - p(x) = 0$). ومنه نستنتج أن $E = E_1 \oplus E_2$.

وأخيراً لقد وجدنا فيما سبق أنه أيًا كان $x \in E$ فإن $p(x) = x_1$ هو الإسقاط الخطي لـ x على الفضاء الجزئي E_1 توازياً مع E_2 . \square

سنسهي هذه الفقرة بذكر خاصيتين بسيطتين نترك إليهما المباشر تقريباً للقارئ:

10-4.1. مبرهنة: ليكن E فضاءً شعاعياً على حقل تبديلي \mathbb{K} . وليكن $(E_i)_{i \in I}$ جماعة متناهية

من الفضاءات الشعاعية الجزئية من E . نفترض أنه، أيّاً كان $i \in I$ ، يوجد أساس $(e_{i,j})_{j \in J_i}$ للفضاء الجزئي E_i . عندئذ تكون الجماعة التالية

$$K = \bigcup_{i \in I} (\{i\} \times J_i) \text{ حيث } (e_{i,j})_{(i,j) \in K}$$

أساساً للفضاء E .

11-4.1. مبرهنة: ليكن E فضاءً شعاعياً على حقل تبديلي \mathbb{K} . وليكن $(E_k)_{1 \leq k \leq n}$ جماعة

متناهية من الفضاءات الشعاعية الجزئية من E . عندئذ يكون التطبيق

$$\Phi : E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_n \rightarrow E, (x_1, x_2, \dots, x_n) \mapsto \sum_{k=1}^n x_k$$

تقابلاً خطياً.

5.1. فضاء خارج القسمة

1-5.1. مبرهنة وتعريف: ليكن E فضاءً شعاعياً على حقل تبديلي \mathbb{K} . وليكن H فضاءً شعاعياً

جزئياً من E . نعرف العلاقة التالية

$$\forall (x, y) \in E \times E, \quad x \mathfrak{R}_H y \Leftrightarrow x - y \in H$$

علاقة تكافؤ على E . نرمز بالرمز E/H إلى مجموعة صفوف التكافؤ بالقياس إلى \mathfrak{R}_H .

وإذا كان $[x]$ و $[y]$ عنصرين من E/H وكان $\lambda \in \mathbb{K}$ ، كان كل من المجموعتين:

$$[x] + [y] = \{x_1 + y_1 : (x_1, y_1) \in [x] \times [y]\}$$

$$\lambda \cdot [x] = \{\lambda \cdot x_1 : x_1 \in [x]\}$$

عنصراً من E/H . يسمح لنا هذا بتزويد المجموعة E/H بقانوني التشكيل $(+)$ و (\cdot)

الذين يجعلان من $(E/H, +, \cdot)$ فضاءً شعاعياً على الحقل \mathbb{K} ، نسميه فضاءً خارج قسمة E على الفضاء الجزئي H .

ويكون في هذه الحالة التطبيق $\mathcal{Q}_H : E \rightarrow E/H : x \mapsto [x]$ تطبيقاً خطياً غامراً،

نسميه القمراً القانوني.

الإثبات

الإثبات تحقق مباشر من التعاريف. نترك تفاصيله للقارئ.

□

2-5.1. مبرهنة : ليكن E و F فضاءين شعاعيين على حقل تبديلي \mathbb{K} . وليكن u تطبيقاً خطياً

من $\mathcal{L}(E, F)$. عندئذ يوجد تقابل خطي $\tilde{u} : E/\ker u \rightarrow \text{Im } u$ يحقق $u = i \circ \tilde{u} \circ \mathcal{Q}$

حيث $\mathcal{Q} : E \rightarrow E/\ker u, x \mapsto [x]$ هو الغمر القانوني، و $i : \text{Im } u \rightarrow F, x \mapsto x$

الإثبات

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{u} & F \\ \mathcal{Q} \downarrow & & \uparrow i \\ E/\ker u & \xrightarrow{\tilde{u}} & \text{Im } u \end{array}$$

ليكن $[x]$ عنصراً من $E/\ker u$. عندئذ يأخذ u قيمة واحدة على جميع عناصر $[x]$. أي

$$\text{card} \{u(\alpha) : \alpha \in [x]\} = 1$$

وذلك لأنه إذا كان $(\alpha, \beta) \in [x] \times [x]$ كان $\alpha - \beta \in \ker u$ ، ومن ثَمَّ $u(\alpha - \beta) = 0$. أي $u(\alpha) = u(\beta)$.

لتعرّف إذن $\tilde{u}([x])$ بأنه العنصر الوحيد الموجود في المجموعة $\{u(\alpha) : \alpha \in [x]\}$ أي

$$\{u(\alpha) : \alpha \in [x]\} = \{\tilde{u}([x])\}$$

نلاحظ مباشرة أن \tilde{u} تطبيق من $E/\ker u$ إلى $\text{Im } u$. وإذا كان $[x]$ و $[y]$ عنصرين

من E/H وكان $\lambda \in \mathbb{K}$ ، كان لدينا $[x + \lambda \cdot y] = [x] + \lambda \cdot [y]$ ومن ثَمَّ

$$\begin{aligned} \tilde{u}([x] + \lambda \cdot [y]) &= \tilde{u}([x + \lambda \cdot y]) = u(x + \lambda \cdot y) \\ &= u(x) + \lambda \cdot u(y) = \tilde{u}([x]) + \lambda \cdot \tilde{u}([y]) \end{aligned}$$

نستنتج من ذلك أن $\tilde{u} : E/\ker u \rightarrow \text{Im } u$. ومن جهة أخرى، من الواضح أن

$$\tilde{u} \text{ تطبيق غامر لأن } \forall x \in E, \tilde{u}([x]) = u(x) \text{ وهو أيضاً متباين لأن}$$

$$[x] \in \ker \tilde{u} \Rightarrow \tilde{u}([x]) = 0 \Rightarrow u(x) = 0 \Rightarrow x \in \ker u \Rightarrow [x] = 0$$

نستنتج أن \tilde{u} تقابل خطي من $\mathcal{L}(E/\ker u, \text{Im } u)$. وأخيراً نتج العلاقة $u = i \circ \tilde{u} \circ \mathcal{Q}$ من

$$\square \quad \text{المساواة الواضحة : } \forall x \in E, \tilde{u}([x]) = u(x).$$



تمرينات

التمرين 1. ليكن $\varphi: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ تطبيقاً متبايناً. ولتكن $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ جماعة من $\mathbb{K}[X]$ فضاء كثيرات الحدود على الحقل \mathbb{K} . نفترض أن $\forall n \in \mathbb{N}, \deg(P_n) = \varphi(n)$. أثبت أن الجماعة $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ حرة.

التمرين 2. ليكن $E = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ ؛ فضاء التتابع من \mathbb{R} إلى \mathbb{R} . نعرف أياً كان $\alpha \in \mathbb{R}$ التابع f_α بالعلاقة $f_\alpha(x) = |x - \alpha|$. أثبت أن الجماعة $(f_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{R}}$ حرة في E .

التمرين 3. ليكن $E = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ ؛ فضاء التتابع من \mathbb{R} إلى \mathbb{R} . نعرف أياً كان $\alpha \in \mathbb{R}$ التابع f_α بـ $f_\alpha(x) = \cos \alpha x$. أثبت أن الجماعة $(f_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{R}}$ حرة في E . مساعدة: احسب $I(\alpha, \beta) = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_0^T \cos(\alpha t) \cos(\beta t) dt$

التمرين 4. ليكن $E = \mathbb{K}_n[X]$ ؛ فضاء كثيرات الحدود على الحقل \mathbb{K} والتي لا تزيد درجتها عن n . أثبت أننا نعرف تطبيقاً خطياً φ من E إلى E بالعلاقة $\varphi(P) = X(1 - X)P'(X) + nXP(X)$

واستنتج أن الجملة $(X^k(1 - X)^{n-k})_{0 \leq k \leq n}$ حرة في E . غير أياً كان $p \in \{0, 1, \dots, n\}$ عن تركيب خطي لعناصر الجملة $(X^k(1 - X)^{n-k})_{0 \leq k \leq n}$ ، ماذا تستنتج؟

التمرين 5. ليكن $E = \mathbb{K}_n[X]$ ؛ فضاء كثيرات الحدود على الحقل \mathbb{K} والتي لا تزيد درجتها عن n . ولتكن $\alpha_n, \dots, \alpha_1, \alpha_0$ عناصر متباينة مثني مثني من \mathbb{K} . نعرف أياً كان $j \in \{0, 1, \dots, n\}$ كثير الحدود ℓ_j بالعلاقة $\ell_j(X) = \prod_{\substack{0 \leq k \leq n \\ k \neq j}} \frac{X - \alpha_k}{\alpha_j - \alpha_k}$. أثبت أن الجملة $(\ell_j)_{0 \leq j \leq n}$ أساس للفضاء E . وأن كل كثير حدود P من E يكتب بطريقة وحيدة بالشكل

$$P = \sum_{k=0}^n P(\alpha_k) \cdot \ell_k$$

التمرين 6. لتكن $(e_k)_{0 \leq k \leq n}$ جملة حرة في فضاء شعاعي E على حقل تبديلي IK . ولتكن $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n$ عناصر متباينة معنى معنى من IK . أثبت أن الجملة $(f_k)_{0 \leq k \leq n}$ المعرفة بالعلاقات $f_k = \sum_{i=0}^n (\alpha_i)^k e_i$ جملة حرة أيضاً.

التمرين 7. ليكن E فضاء شعاعياً على حقل IK عدده المميز يساوي 0. ولنذكر بأن تطبيقاً خطياً p من E إلى E هو إسقاط إذا وفقط إذا كان $p \circ p = p$.

1. ليكن p إسقاطاً لـ E . أثبت أنه يوجد فضاء شعاعيان جزئيان متماثلان E_1 و E_2 من E ، بحيث يكون p إسقاطاً لـ E على E_1 توازياً مع E_2 .
2. ليكن p إسقاطاً لـ E ، ولتكن $\lambda \in IK \setminus \{0, 1\}$. أثبت أن $p - \lambda I_E$ تشاكل تقابلي خطي.
3. ليكن p و q إسقاطين لـ E . أثبت أن $p + q$ إسقاط لـ E إذا وفقط إذا كان $p \circ q = q \circ p = 0$. عيّن في هذه الحالة صورة ونواة $p + q$.
4. ليكن p و q إسقاطين لـ E ، حيث $p \circ q = 0$. أثبت أن $r = p + q - q \circ p$ إسقاط لـ E وعيّن صورته ونواته.

5. نقول عن تطبيق خطي $u: E \rightarrow E$ إنه يحافظ على الفضاء الشعاعي الجزئي E_1 من E إذا وفقط إذا كان $u(E_1) \subset E_1$. ليكن p إسقاطاً لـ E ، و u تطبيقاً خطياً من E إلى E . أثبت أن التطبيقين u و p يتبادلان إذا وفقط إذا كان u يحافظ على كل من $\ker p$ و $\text{Im } p$.

6. ليكن $u: E \rightarrow E$ تطبيقاً خطياً يحقق $u^m = I_E$ حيث $m \in \mathbb{N}^*$. نفترض أن u يحافظ على الفضاء الجزئي E_1 من E . ليكن p إسقاطاً لـ E على E_1 . أثبت أن التطبيق الخطي المعرفة بالعلاقة

$$q = \frac{1}{m} \sum_{k=0}^{m-1} u^k \circ p \circ u^{m-k}$$

هو إسقاط لـ E على E_1 ، وأن u يحافظ على الفضاء الجزئي $\ker q$.

التمرين 8. ادرس في $C([0, 1], \mathbb{R})$ ، الارتباط الخطي للجملة $(f, f \circ f, f \circ f \circ f, \dots)$ حيث $f(x) = \ln(1+x)$.

التمرين 9. ليكن $E = \mathbb{K}_n[X]$ ، فضاء كثيرات الحدود على الحقل \mathbb{K} والتي لا تزيد درجتها عن n . ولتكن $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n$ عناصر متباينة مفتي مفتي من \mathbb{K} . نعرف أيضاً كـان $J = \{0, 1, \dots, n\}$ كثير الحدود P_J بالعلاقة $P_J(X) = (X - \alpha_J)^n$. أثبت أن الجملة $(P_J)_{0 \leq J \leq n}$ حرة في E .

التمرين 10. ليكن E فضاء التوابع من الصف C^∞ على \mathbb{R} والدورية ذات الدور 2π . وليكن T التطبيق الخطي من $\mathcal{L}(E)$ المعرف بالعلاقة $T[f] = f''$. عيّن صورة ونواة T .

التمرين 11. ليكن E فضاء شعاعياً على حقل \mathbb{K} ، و ليكن $f: E \rightarrow E$ تطبيقاً خطياً.

$$1. \text{ أثبت أن: } \ker f^2 = \ker f \Leftrightarrow \ker f \cap \text{Im } f = \{0\}$$

$$2. \text{ أثبت أن: } \text{Im } f^2 = \text{Im } f \Leftrightarrow E = \ker f + \text{Im } f$$

3. نفترض أن بُعد E منتهٍ R . أثبت تكافؤ الشروط الأربعة السابقة.

التمرين 12. ليكن E فضاء شعاعياً على حقل \mathbb{K} عدده المميز لا يساوي 2.

1. ليكن F فضاء شعاعياً جزئياً من E ولا يساوي E . وليكن u تطبيقاً خطياً من E إلى E ومحققاً للشرط:

$$\forall x \in E \setminus F, \exists \lambda_x \in \mathbb{K}, \quad u(x) = \lambda_x \cdot x$$

أثبت أنه يوجد عدد λ في \mathbb{K} بحيث $u = \lambda I_E$.

2. ليكن a عنصراً من $E \setminus \{0\}$. عيّن مجموعة التطبيقات الخطية f من $\mathcal{L}(E)$ والتي تكون من أجلها الجملة $(a, x, f(x))$ مرتبطة أياً كانت x من E .



الفضاءات الشعاعية المنتهية البعد

1.11. عمومييات

II.1-1. مبرهنة : ليكن E فضاء شعاعياً على حقل \mathbb{K} . ولتكن $(e_i)_{i \in I}$ جماعة من عناصر E .
إن الخواص التالية متكافئة:

1. الجماعة $(e_i)_{i \in I}$ أساس لـ E .

2. الجماعة $(e_i)_{i \in I}$ جماعة مولدة أصغرية. (أي إن الجماعة $(e_i)_{i \in I \setminus \{j\}}$ لا تولد E أيضاً
كان $|I| \geq 1$).

3. الجماعة $(e_i)_{i \in I}$ جماعة حرة أعظمية. (أي تكون مرتبطة خطياً كل جماعة تُمدد تماماً الجماعة السابقة.)

الآليات

1. \Leftarrow 3. إذا لم يكن ذلك صحيحاً يمكن توسيع مجموعة الأدلة إلى $\{J\} \cup I$ ، حيث $J \neq I$ ، وإيجاد عنصر $e_J \in E$ بحيث تكون الجماعة الجديدة $(e_I)_{I \in J}$ حرة. ولكن الجماعة $(e_I)_{I \in I}$ أساس لـ E إذن توجد جماعة شبه معلومة $(\alpha_i)_{i \in I}$ في $\mathbb{R}^{(I)}$ بحيث $e_J = \sum \alpha_i e_i$ وهذا يتناقض مع كون الجماعة $(e_i)_{i \in J}$ حرة.

3. \Leftarrow 2. : ليكن $x \in E$ وليكن $j \neq I$ نضع $J = I \cup \{j\}$ و $e_j = x$. ولما كانت الجماعة $(e_i)_{i \in I}$ حرة أعظمية كانت الجماعة $(e_i)_{i \in J}$ مرتبطة. إذن توجد جماعة شبه معدومة $\text{IK}^{(I)}$ من $\{\alpha_i\}_{i \in J}$ بحيث $\sum_{i \in J} \alpha_i e_i = 0$ ولأن $0 \neq \alpha_j$ يتناقض مع كون الجماعة $(e_i)_{i \in I}$ حرة، إذن $0 \neq \alpha_j$ وبالإمكان القسمة على α_j . عندئذ يكون $x = e_j = \sum_{i \in I} -\frac{\alpha_i}{\alpha_j} \cdot e_i$ ومن ثم تكون الجماعة $(e_i)_{i \in I}$ مولدة، وهي أصغرية لأنها حرة.

2.1. ⇐ : إذا لم تكن الجماعة $(e_i)_{i \in I}$ حرة وُجِدَ $i_0 \in I$ بحيث يكون العنصر e_{i_0} تركيباً خطياً في عناصر $(e_i)_{i \in I \setminus \{i_0\}}$. ومن ثَمَّ تكون الجماعة $(e_i)_{i \in I \setminus \{i_0\}}$ مولدة وهذا يتناقض مع كون الجماعة $(e_i)_{i \in I}$ جماعة مولدة أصغرية. □

II. 1-2. مبرهنة : ليكن E فضاء شعاعياً على حقل IK . وليكن (e_1, e_2, \dots, e_n) جملة من E . نضع $F = \text{vect}(e_1, e_2, \dots, e_n)$. عندئذ تكون كل جملة $(f_1, f_2, \dots, f_{n+1})$ من F مرتبطة خطياً.

الإثبات

ستثبت هذه المبرهنة بالتدريج على n .

إذا كانت $1 = n$ فإن $F = \{\lambda \cdot e_1, \lambda \in IK\}$. فإذا كان f_1 و f_2 من F وُجِدَ عددان λ_1 و λ_2 من IK بحيث $f_i = \lambda_i e_1$ و $i = 1, 2$. عندئذ يكون $\lambda_2 f_1 - \lambda_1 f_2 = 0$ و تكون الجملة (f_1, f_2) مرتبطة خطياً. (لاحظ أنَّ حالة $0 = \lambda_2 = \lambda_1$ تافهة).

لتفترض صحة الحاصة عند قيمة $n - 1$. و لنفترض أنَّ $(f_1, f_2, \dots, f_{n+1})$ جملة من

$F = \text{vect}(e_1, e_2, \dots, e_n)$. عندئذ توجد جملة $(\alpha_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n+1 \\ 1 \leq j \leq n}}$ من IK بحيث :

$$\begin{aligned} f_1 &= \alpha_{11} e_1 + \alpha_{12} e_2 + \dots + \alpha_{1n} e_n \\ f_2 &= \alpha_{21} e_1 + \alpha_{22} e_2 + \dots + \alpha_{2n} e_n \\ &\vdots \\ f_{n+1} &= \alpha_{n+1,1} e_1 + \alpha_{n+1,2} e_2 + \dots + \alpha_{n+1,n} e_n \end{aligned}$$

إذا كان $\alpha_{1n} = \alpha_{2n} = \dots = \alpha_{n+1,n} = 0$ كانت الجملة (f_1, f_2, \dots, f_n) جملة من

عناصر $\text{vect}(e_1, e_2, \dots, e_{n-1})$ ، وبمقتضى فرض التدريج تكون هذه الجملة مرتبطة خطياً.

لتفترض إذن أنَّ $\alpha_{k,n} \neq 0$ ، ولنضع أياً كان j من $\{1, 2, \dots, n\}$:

$$\tilde{f}_j = f_j - \frac{\alpha_{j,n}}{\alpha_{k,n}} f_k \in \text{vect}(e_1, \dots, e_{n-1})$$

عندئذ تكون $(\tilde{f}_j)_{j \in \{1, 2, \dots, n\} \setminus \{k\}}$ جملة من $\text{vect}(e_1, \dots, e_{n-1})$ فهي إذن مرتبطة خطياً بمقتضى

فرض التدريج. ومن ثَمَّ توجد جملة غير معدومة $(\lambda_j)_{j \in \{1, 2, \dots, n\} \setminus \{k\}}$ من IK بحيث $\sum_{j \neq k} \lambda_j \tilde{f}_j = 0$

ومنه $0 = \sum_{j \neq k} \lambda_j \alpha_{j,n} f_k - \left(\sum_{j \neq k} \lambda_j \frac{\alpha_{j,n}}{\alpha_{k,n}} \right) f_k = 0$ وهذا يثبت أنَّ $(f_1, f_2, \dots, f_{n+1})$ جملة مرتبطة. □

3-1. II. نتيجة : ليكن E فضاء شعاعياً على حقل IK . إذا كانت (e_1, e_2, \dots, e_n) جملة مولدة لـ E كانت كل جماعة $(f_j)_{j \in J}$ تُحقق الشرط $\text{card } J > n$ مرتبطة خطياً.

2. II. بُعد فضاء شعاعي

2-1. II. تعريف : ليكن E فضاء شعاعياً على حقل IK . نقول إن E منتهي البعد إذا وفقط إذا وُجدت فيه جماعة مولدة ومنتهية (أي $(e_i)_{i \in I}$ مع $\text{card } I < +\infty$).

2-2. II. مبرهنة : ليكن E فضاء شعاعياً على حقل IK . ولتكن $(e_i)_{i \in I}$ جماعة من عناصر E . نفترض أن الجماعة $(e_i)_{i \in I}$ جملة مولدة وأنه توجد مجموعة جزئية غير خالية J من I بحيث تكون الجماعة $(e_i)_{i \in J}$ حرة. عندئذ توجد K مجموعة جزئية من I تحوي J أي $I \supset K \supset J$ بحيث تكون الجماعة $(e_i)_{i \in K}$ أساساً لـ E .

الإثبات

سنقدم البرهان فقط في حالة كون الفضاء الشعاعي E منتهي البعد. الحالة العامة تتطلب تقنيات إضافية : (توطئة Zorn) وهي خارجة عن إطار الكتاب.

لما كان E فضاءً منتهي البعد يوجد عدد طبيعي n بحيث تكون كل جملة $(f_j)_{j \in L}$ تُحقق الشرط $\text{card } L > n$ مرتبطة خطياً. وذلك استناداً إلى النتيجة 3-1. II. لنعرف

$$\mathcal{A} = \{H \subset I : (J \subset H) \wedge \text{جماعة حرة } (e_i)_{i \in H}\}$$

من الواضح أن $J \in \mathcal{A}$ وأنه بمقتضى الملاحظة السابقة $\forall H \in \mathcal{A}, \text{card } H \leq n$. إذن يوجد $K \ni \mathcal{A}$ بحيث $\text{card } K = \max \{\text{card } H : H \in \mathcal{A}\}$.

من جهة أولى، لما كان $K \ni \mathcal{A}$ كانت الجملة $(e_i)_{i \in K}$ حرة ومحقة $J \subset K \subset I$.

ومن جهة ثانية، إذا لم تكن الجملة $(e_i)_{i \in K}$ مولدة وُجدَ عنصر $j \in I \setminus K$ بحيث يكون $e_j \in \text{vect}((e_i)_{i \in K})$ ولكن هذا يقتضي أن الجملة $(e_i)_{i \in K \cup \{j\}}$ جملة حرة في E ومن ثم أن $\{j\} \cup K \ni \mathcal{A}$ ، وهذا يتناقض مع تعريف K . إذن الجملة $(e_i)_{i \in K}$ مولدة وهي من ثم تكون أساساً لـ E . \square

3.2.II. نتيجة: ليكن E فضاء شعاعياً على حقل IK . نفترض أن $\mathcal{E} = (e_1, \dots, e_r)$ جملة حرة من E و $\mathcal{G} = (g_1, \dots, g_m)$ جملة مولدة لـ E . عندئذ يمكننا أن ننصم \mathcal{E} إلى أساس $(e_1, \dots, e_r, e_{r+1}, \dots, e_n)$ للفضاء E وذلك بأخذ العناصر e_{r+1}, \dots, e_n من المجموعة $\{g_k : k \leq m\}$.

3.2.II. مبرهنة وتعريف: ليكن E فضاء شعاعياً منتهي البعد على حقل IK ، نفترض أن $\{0\} \neq E$. عندئذ يوجد عددٌ طبيعيٌ وحيدٌ n بحيث يحقق كلُّ أساس $(e_i)_{i \in I}$ للفضاء E الشرط $n = \text{card } I$.
نسمي العدد n بُعد الفضاء الشعاعي E على الحقل IK ، و نرمز إليه بالرمز $\dim_{IK} E$ ، أو ببساطة $\dim E$ ، إذا لم يكن هنالك مجال للالتباس.

الإثبات

ليكن $\mathcal{E} = (e_1, \dots, e_n)$ و $\mathcal{F} = (f_1, \dots, f_m)$ أساسين لـ E . لما كانت \mathcal{E} جملة مولدة، ولأن الجملة \mathcal{F} جملة حرة، كان $n \geq m$ وذلك بمقتضى النتيجة 3.1.II. وبأسلوب مماثل، الجملة \mathcal{F} جملة مولدة و الجملة \mathcal{E} جملة حرة إذن $m \geq n$ ، ومن ثم $m = n$. \square

4.2.II. ملاحظة: نصلح أن $\dim\{0\} = 0$ ، وأنه إذا لم يكن الفضاء الشعاعي E منتهي البعد على IK فإن $\dim_{IK} E = +\infty$.

5.2.II. نتيجة: ليكن E فضاء شعاعياً منتهي البعد على حقل IK . و ليكن F فضاء شعاعياً جزئياً من E . عندئذ يكون F فضاءً شعاعياً منتهي البعد ويكون $\dim F \leq \dim E$.

الإثبات

إذا كان $F = \{0\}$ تم المطلوب. نفترض أن $F \neq \{0\}$ و لتعرف \mathcal{A} مجموعة الأعداد الطبيعية $q \geq 1$ حيث توجد جملة (x_1, \dots, x_q) حرة في F .
لما كانت كل جملة حرة في F حرة في E كان $\mathcal{A} \subset \text{IN}_{\dim E}$ لأن $\{0\} \neq F$.
ليكن $p = \max \mathcal{A} \leq \dim E$ عندئذ توجد جملة (x_1, \dots, x_p) حرة في F وهي أعظمية في F فهي تكون أساساً لـ F . و منه $p = \dim F$ وهذا هو المطلوب. \square

6-2.11. مبرهنة: إذا كان E و F فضاءين شعاعيين على حقل IK و كان بُعداهما منتهيين كان $E \times F$ فضاء شعاعياً منتهي البعد على الحقل IK و تحققت العلاقة:

$$\dim E \times F = \dim E + \dim F$$

الإثبات

إن هذه النتيجة صحيحة لأنه إذا تأملنا أساساً $\mathcal{E} = (e_1, \dots, e_n)$ لـ E ، وتأملنا كذلك أساساً $\mathcal{F} = (f_1, \dots, f_m)$ لـ F . كانت الجملة

$$((e_1, 0), (e_2, 0), \dots, (e_n, 0), (0, f_1), (0, f_2), \dots, (0, f_m))$$

أساساً لـ $E \times F$. \square

7-2.11. تعميم: لنكن E_1, E_2, \dots, E_n فضاءات شعاعية منتهية البعد على حقل IK . عندئذ يكون $E_1 \times E_2 \times \dots \times E_n$ فضاءً شعاعياً منتهي البعد أيضاً و يكون

$$\dim(E_1 \times E_2 \times \dots \times E_n) = \sum_{i=1}^n \dim E_i$$

8-2.11. مبرهنة: ليكن E و F فضاءين شعاعيين على حقل IK . نفترض أن بُعد كلٍّ من E و F منته . عندئذ تكون الخاصتان التاليتان متكافئتين:

1. يوجد تقابل خطي u بين E و F ، (ونكتب عندئذ $E \cong F$).

2. $\dim E = \dim F$.

الإثبات

1. \Leftarrow 2. ليكن $\mathcal{E} = (e_1, \dots, e_n)$ أساساً لـ E . ولنعرف $f_i = u(e_i)$ أيأ كانت $i \in \mathbb{N}_n$.

إن الجملة $\mathcal{F} = (f_1, \dots, f_n)$ أساس لـ F . وذلك لأنه من جهة أولى: الجملة \mathcal{E} جملة حرة والتطبيق u متباين إذن \mathcal{F} جملة حرة، ومن جهة ثانية لأن \mathcal{E} جملة مولدة ولأن التطبيق u غامر يتج أن \mathcal{F} جملة مولدة. ومن ثم $\dim F = n = \dim E$.

2. \Leftarrow 1. ليكن $\mathcal{E} = (e_1, \dots, e_n)$ أساساً لـ E وليكن $\mathcal{F} = (f_1, \dots, f_n)$ أساساً لـ F . إن

التطبيق الخطي $u : E \rightarrow F$ المعرفة بـ $u(e_i) = f_i \quad \forall i \in \mathbb{N}_n$ هو التقابل الخطي

\square

المطلوب.

9-2.II. نتيجة: ليكن E فضاء شعاعياً منتهي البعد على حقل \mathbb{K} . عندئذ يكون E مُشاكلاً تقابلياً للفضاء $\mathbb{K}^{\dim E}$. أي $E \cong \mathbb{K}^{\dim E}$.

نمرين: ليكن \mathbb{F} حقلاً منتهياً، إذن $\text{card } \mathbb{F} = p^n$ حيث $n \in \mathbb{N}^*$ و p عدد أولي. في الحقيقة، ليكن p العدد المميز للحقل \mathbb{F} . نعلم أن p عدد أولي لأن \mathbb{F} حلقة تامة. ومن ثم يكون $\mathbb{K} = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ حقلاً جزئياً من \mathbb{F} ، ويمكن اعتبار \mathbb{F} فضاء شعاعياً على \mathbb{K} . ولما كان \mathbb{F} حقلاً منتهياً كان بُعد الفضاء الشعاعي \mathbb{F} على الحقل \mathbb{K} منتهياً. لنضع $n = \dim_{\mathbb{K}} \mathbb{F}$. عندئذ يكون $\mathbb{F} \cong \mathbb{K}^n$ بمقتضى النتيجة السابقة ومنه $\text{card } \mathbb{F} = p^n$.

10-2.II. نتيجة: ليكن E فضاء شعاعياً على حقل \mathbb{K} . لنفترض أن E_1, E_2, \dots, E_n فضاءات شعاعية جزئية أبعادها منتهية من E . ولنفترض أن المجموع $\sum_{i=1}^n E_i$ مباشر. عندئذ يكون الفضاء $E_1 \oplus E_2 \oplus \dots \oplus E_n$ منتهي البعد، ويكون $\dim \bigoplus_{i=1}^n E_i = \sum_{i=1}^n \dim E_i$.

الإثبات

في الحقيقة إن التطبيق

$$\varphi: E_1 \times E_2 \times \dots \times E_n \rightarrow \bigoplus_{i=1}^n E_i, (x_1, \dots, x_n) \mapsto \sum_{i=1}^n x_i$$

□ تقابل خطي استناداً إلى المبرهنة 11-4.I.

11-2.II. مبرهنة: ليكن E فضاء شعاعياً منتهي البعد على حقل \mathbb{K} . و ليكن F فضاء شعاعياً جزئياً من E . يوجد فضاء شعاعي جزئي G من E بحيث $E = F \oplus G$.

الإثبات

ليكن (e_1, \dots, e_r) أساساً لـ F . يمكننا بناءً على المبرهنة 3-2.II أن نجد e_{r+1}, \dots, e_n في E بحيث يكون $(e_1, \dots, e_r, e_{r+1}, \dots, e_n)$ أساساً لـ E . نعرف إذن

$$G = \text{vect}\{e_{r+1}, \dots, e_n\}$$

□ ونتحقق بسهولة أن $E = F \oplus G$.

ملاحظة: إن الخاصية السابقة صحيحة ولو لم يكن $\dim E < +\infty$.

12-2. II. مبرهنة: ليكن E فضاء شعاعياً منتهياً البعد على حقل \mathbb{K} ، و ليكن F فضاء شعاعياً جزئياً من E . عندئذ يكون بُعد E/F منتهياً، ويكون

$$\dim E/F = \dim E - \dim F.$$

الإثبات

ليكن G فضاء شعاعياً جزئياً من E يحقق $E = F \oplus G$ ، (موجود استناداً إلى المبرهنة 11-2. II). ولتأمل $\Phi: G \rightarrow E/F, x \mapsto [x]$ ، مقصور الغمر القانوني على الفضاء الجزئي G . إن Φ تشاكل تقابلي خطي.

في الحقيقة، إن Φ خطي لأنه مقصور تطبيق خطي على فضاء شعاعي جزئي من منطقه. وهو متباين لأن

$$\begin{aligned} x \in \ker \Phi &\Leftrightarrow \{x \in G\} \wedge ([x] = 0) \\ &\Leftrightarrow \{x \in G\} \wedge \{x \in F\} \\ &\Leftrightarrow \{x \in G \cap F\} \Leftrightarrow x = 0 \end{aligned}$$

وأخيراً إذا كان $x \in E$ كان $x = x_F + x_G$ ومن ثم $[x] = [x_G] = \Phi(x_G)$ إذن Φ غامر. ينتج من ذلك أن $\dim E/F = \dim G = \dim E - \dim F$. وهو المطلوب إثباته. \square

13-2. II. تعريف: إذا كان E فضاء شعاعياً على حقل \mathbb{K} ، و كان F فضاء شعاعياً جزئياً من E . نقول إن تمام بُعد F منته و نكتب $\text{codim}_E F < +\infty$ إذا فقط إذا كان بُعد الفضاء E/F منتهياً. ويكون بالتعريف $\text{codim}_E F = \dim E/F$. لقد أثبتنا في المبرهنة السابقة أنه إذا كان بُعد E منتهياً كان $\text{codim}_E F = \dim E - \dim F$.

14-2. II. مبرهنة: ليكن E فضاء شعاعياً منتهياً البعد على حقل \mathbb{K} . و ليكن u تطبيقاً خطياً من E إلى فضاء شعاعي F على الحقل \mathbb{K} ، أي $u \in \mathcal{L}(E, F)$. عندئذ يكون بُعد $\text{Im } u$ منتهياً ويكون

$$\dim E = \dim(\ker u) + \dim(\text{Im } u)$$

الإثبات

لقد أثبتنا في المبرهنة 2-5. I. أن $\text{Im } u \cong E/\ker u$ ومن ثم يكون

$$\dim \text{Im } u = \dim E/\ker u = \dim E - \dim \ker u$$

\square

15-2. II. مبرهنة: ليكن E و F فضاءين شعاعيين أبعادهما منتهية على حقل IK . عندئذ

يكون بُعد الفضاء $\mathcal{L}(E, F)$ منتهياً ويكون $\dim \mathcal{L}(E, F) = \dim E \cdot \dim F$.

الإثبات

ليكن $\mathcal{E} = (e_1, \dots, e_n)$ أساساً لـ E . لما كان التطبيق الخطي يتعين بطريقة وحيدة انطلاقاً من صورة أساس للمنطلق، كان التطبيق

$$\Phi : \mathcal{L}(E, F) \rightarrow F^n, u \mapsto (u(e_1), u(e_2), \dots, u(e_n))$$

تقابلاً خطياً، ومن ثمّ

$$\square \quad \dim \mathcal{L}(E, F) = \dim F^n = \sum_{i=1}^n \dim F = \dim E \cdot \dim F$$

3. II. رتبة جماعة أشعة و رتبة تطبيق خطي

1-3. II. تعريف: ليكن $(x_i)_{i \in I}$ جماعة من فضاء شعاعي E . إذا كان بُعد $\text{vect}((x_i)_{i \in I})$

منتهياً قلنا إنّ رتبة الجماعة $(x_i)_{i \in I}$ منتهية وكتبنا $\text{rg}((x_i)_{i \in I}) = \dim \text{vect}((x_i)_{i \in I})$.

2-3. II. مبرهنة: ليكن u تطبيقاً خطياً بين فضاءين شعاعيين E و F . وليكن $(x_i)_{i \in I}$ جماعة

من E ربتها منتهية r . عندئذ تكون رتبة الجماعة $(u(x_i))_{i \in I}$ منتهية أيضاً ويكون

$$\text{rg}((u(x_i))_{i \in I}) \leq \text{rg}((x_i)_{i \in I})$$

الإثبات

ليكن $G = \text{vect}((x_i)_{i \in I})$ عندئذ $r = \dim G = \text{rg}((x_i)_{i \in I})$. وليكن التطبيق الخطي

v مقصور u إلى G أي $v = u|_G \in \mathcal{L}(G, F)$ إنّ $\text{Im } v = \text{vect}((u(x_i))_{i \in I})$ ومن ثمّ

$$\square \quad r = \dim G = \dim \ker v + \dim \text{Im } v \geq \dim \text{Im } v = \text{rg}(u(x_i))_{i \in I}$$

3-3. II. تعريف: ليكن u تطبيقاً خطياً بين فضاءين شعاعيين E و F . إذا كان بُعد $\text{Im } u$

منتهياً قلنا إنّ رتبة u منتهية وكتبنا $\text{rg } u = \dim \text{Im } u$.

ونلاحظ من جهة أولى أنّه إذا كان $\dim E < +\infty$ كان $\dim E = \dim \ker u + \text{rg } u$.

وأنه من جهة ثانية إذا كان $\dim F < +\infty$ كان $\text{rg } u \leq \dim F$. إذن

$$\forall u \in \mathcal{L}(E, F), \quad \text{rg } u \leq \min(\dim E, \dim F)$$

ونلاحظ أيضاً أنه إذا كان بُعد كل من E و F متنهاً كان التكافؤان الهامان التاليان:

$$u \text{ متباين } \Leftrightarrow \dim E = \operatorname{rg} u$$

$$u \text{ غامر } \Leftrightarrow \dim F = \operatorname{rg} u$$

II.3-4. مبرهنة: ليكن E و F فضاءين شعاعيين أبعادهما منتهية بحيث $\dim E = \dim F = n$.

وليكن $u \in \mathcal{L}(E, F)$. عندئذ يكون هناك تكافؤ بين الخواص التالية:

1. u غامر.

2. u متباين.

3. u تقابل.

4. $n = \operatorname{rg} u$.

5. u قلوب من اليسار. (أي يوجد v من $\mathcal{L}(F, E)$ بحيث $v \circ u = I_E$).

6. u قلوب من اليمين. (أي يوجد v من $\mathcal{L}(E, F)$ بحيث $u \circ v = I_F$).

الإثبات

□ الإثبات سهل و متروك للقارئ.

II.3-5. مبرهنة: لتكن E و F و G ثلاثة فضاءات شعاعية ذات أبعاد منتهية على حقل K .

و ليكن $u \in \mathcal{L}(E, F)$ و $v \in \mathcal{L}(F, G)$. عندئذ

$$1. \operatorname{rg}(v \circ u) \leq \min(\operatorname{rg}(u), \operatorname{rg}(v))$$

2. إذا كان u غامراً فإن $\operatorname{rg}(v \circ u) = \operatorname{rg}(v)$.

3. إذا كان v متبايناً فإن $\operatorname{rg}(v \circ u) = \operatorname{rg}(u)$.

الإثبات

1. لدينا من جهة أولى $\operatorname{Im}(v \circ u) = v(\operatorname{Im}(u))$ و من ثم $\operatorname{rg}(v \circ u) \leq \operatorname{rg}(u)$. ومن جهة

ثانية $\operatorname{Im}(u) \subset F$ إذن $\operatorname{Im}(v \circ u) \subset \operatorname{Im} v$ و من ثم $\operatorname{rg}(v \circ u) \leq \operatorname{rg}(v)$.

2. إذا كان u غامراً كان $\operatorname{Im} v \subset \operatorname{Im}(v \circ u)$.

3. و إذا كان v متبايناً كان $\operatorname{rg} u = \dim \operatorname{Im}(u) = \dim v(\operatorname{Im}(u)) = \operatorname{rg}(v \circ u)$. □

6-3.II. ملاحظة عملية:

لتعيين رتبة جملة أشعة (a_1, \dots, a_p) من فضاء شعاعي E بُعدته n ، نكتب أولاً كل شعاع منها كعبارة خطية بعناصر أساس $\mathcal{E} = (e_1, \dots, e_n)$. ثم نلاحظ أن الفضاء $\text{vect}(a_1, \dots, a_p)$ لا يتغير إذا ضرب أحد الأشعة a_i بثابت مختلف عن 0 أو إذا أضيف إلى أحد الأشعة a_i تركيب خطي في بقية الأشعة $a_1, \dots, a_{i-1}, a_{i+1}, \dots, a_p$. لذلك نسعى للحصول على جملة (b_1, \dots, b_p) من أشعة $\text{vect}(a_1, \dots, a_p)$ تولد الفضاء نفسه و بحيث تكون مركباتها على الأساس $\mathcal{E} = (e_1, \dots, e_n)$ حاوية العديد من الأصفار. في الحقيقة نسمى لأن يكون تمثيل الأشعة b_1, \dots, b_p على الأساس $\mathcal{E} = (e_1, \dots, e_n)$ من النمط التالي:

$$\begin{array}{c|cccccc} & b_1 & b_2 & \dots & \dots & b_p \\ \hline e_1 & x & 0 & \dots & \dots & 0 \\ e_2 & x & x & 0 & & \vdots \\ \vdots & x & & x & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & & \ddots & 0 \\ & x & & & & \vdots \\ & \vdots & & & & \vdots \\ e_n & x & x & \dots & \dots & x \end{array}$$

سنوضح هذا الأسلوب في المثال التالي، حيث نحسب رتبة (a_1, a_2, a_3, a_4) من \mathbb{R}^5 والتي مركباتها على الأساس القانوني معطاة كما يلي :

$$a_4 = \begin{bmatrix} -2 \\ 7 \\ 0 \\ 13 \\ 12 \end{bmatrix}, a_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ و } a_2 = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \\ 7 \end{bmatrix} \text{ و } a_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \\ 5 \\ 9 \end{bmatrix}$$

نبين فيما يلي العمليات التي يمكن إجراؤها على هذه الأشعة للحصول على الشكل السابق:

$$\begin{array}{cccc} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ \begin{bmatrix} 2 & 5 & -1 & -2 \\ 3 & 1 & 2 & 7 \\ -1 & 1 & 3 & 0 \\ 5 & 2 & 5 & 13 \\ 9 & 7 & 1 & 12 \end{bmatrix} & \rightarrow & \begin{array}{cccc} a_3 & a_1 + 2a_3 & a_2 + 5a_3 & a_4 - 2a_3 \\ \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 7 & 11 & 3 \\ 3 & 5 & 16 & -6 \\ 5 & 15 & 27 & 3 \\ 1 & 11 & 12 & 10 \end{bmatrix} \end{array} \end{array}$$

$$\begin{aligned}
 & a_3, \quad a_2 - a_1 - a_4 + 5a_3, \quad a_1 + 2a_3, \quad a_4 - 2a_3 \\
 & \rightarrow \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 7 & 3 \\ 3 & 17 & 5 & -6 \\ 5 & 9 & 15 & 3 \\ 1 & -9 & 11 & 10 \end{bmatrix} \\
 & a_3, \quad a_2 - a_1 - a_4 + 5a_3 = b_2, \quad a_1 + 2a_3 - 7b_2, \quad a_4 - 2a_3 - 3b_2 \\
 & \rightarrow \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 17 & -114 & -57 \\ 5 & 9 & -48 & -24 \\ 1 & -9 & 74 & 37 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & b_1 \quad b_2 \quad b_3 \quad b_4 \\
 & \rightarrow \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 17 & -57 & 0 \\ 5 & 9 & -24 & 0 \\ 1 & -9 & 37 & 0 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

حيث

$$\begin{aligned}
 b_1 &= a_3 \\
 b_2 &= -a_1 + a_2 + 5a_3 - a_4 \\
 b_3 &= 3a_1 - 3a_2 - 17a_3 + 4a_4 \\
 b_4 &= 2a_1 - a_2 + a_3 - a_4
 \end{aligned}$$

نستنتج أن $\text{rg}(a_1, a_2, a_3, a_4) = 3$ وأنه توجد علاقة ارتباط خطي بين الأشعة a_2, a_1 ,

$$a_4 \text{ و } a_3 \text{ هي } b_4 = 2a_1 - a_2 + a_3 - a_4 = 0.$$



تمرينات

التمرين 1. ليكن E فضاء شعاعياً على حقل \mathbb{K} ، بُعد n . وليكن f تطبيقاً خطياً من E إلى E ، و x عنصراً من $E \setminus \{0\}$. نفترض أن الجملة $(f(x), f^2(x), \dots, f^n(x))$ أساس E . أثبت أن f قابل، وأنه يوجد من \mathbb{K}^n بحيث

$$f^n + a_n f^{n-1} + \dots + a_1 I_E = 0.$$

التمرين 2. ليكن E و F فضاءين شعاعيين على حقل \mathbb{K} . وليكن V فضاء شعاعياً جزئياً من E وكذلك ليكن W فضاء شعاعياً جزئياً من F . نعرّف $\mathcal{L}_{V,W}(E, F)$ بأنها المجموعة:

أثبت أن $\mathcal{L}_{V,W}(E, F)$ فضاء شعاعي جزئي من $\mathcal{L}(E, F)$ يُشاكل تقابلياً الفضاء $\mathcal{L}(E/V, W)$. ماذا يمكن أن نقول عن بُعد $\mathcal{L}_{V,W}(E, F)$ إذا كان كل من $\dim V$ و $\text{codim } W$ متناهياً؟

التمرين 3. ليكن $E = \mathbb{R}^4$. ولكن الأشعة $a = (1, 2, 3, 4)$ ، $b = (1, 1, 1, 3)$ ، $c = (2, 1, 1, 1)$ ، $e = (2, 3, 0, 1)$ ، $d = (-1, 0, -1, 2)$ من E . وليكن الفضاءين الجزئيين:

احسب أبعاد كل من U و V و $U \cap V$ و $U + V$.

التمرين 4. ليكن E فضاء شعاعياً على حقل \mathbb{K} . وليكن E_1 و E_2 فضاءين شعاعيين جزئيين من E . نفترض أن بُعد $E_1 + E_2$ متناهٍ. أثبت أن

ثم أثبت أن الشرط $\dim E_1 + \dim E_2 > \dim E$ يقتضي أن $E_1 \cap E_2 \neq \{0\}$.

التمرين 5. لتكن E و F و G ثلاثة فضاءات شعاعية منتهية الأبعاد على حقل IK .

1. ليكن $f \in \mathcal{L}(E, F)$ و $g \in \mathcal{L}(F, G)$. أثبت أن

$$\operatorname{rg}(f) + \operatorname{rg}(g) - \dim F \leq \operatorname{rg}(g \circ f) \leq \min(\operatorname{rg}(f), \operatorname{rg}(g))$$

2. ليكن $f \in \mathcal{L}(E, F)$ و $g \in \mathcal{L}(E, F)$. أثبت أن

$$|\operatorname{rg}(f) - \operatorname{rg}(g)| \leq \operatorname{rg}(g + f) \leq \operatorname{rg}(f) + \operatorname{rg}(g)$$

التمرين 6. ليكن E فضاءً شعاعياً على حقل IK ، بعده n . وليكن E_1 و E_2 فضاءين شعاعيين

جزئيين من E يحققان $\dim E_1 = \dim E_2 = n - p$. أثبت أنه يوجد فضاء شعاعسي

$$F \text{ جزئي } F \text{ يحقق } E = F \oplus E_1 = F \oplus E_2$$

التمرين 7. لتكن $n \in \mathbb{N}^*$ ، وليكن $E = \mathbb{R}_n[X]$ فضاء كثيرات الحدود الحقيقية التي لا تزيد

درجتها عن n . وليكن $u \in \mathcal{L}(E)$ معرفاً بـ

$$u(P) = P(X+1) + P(X-1) - 2P(X)$$

1. تحقق أنّ u خطّي وعين $\ker u$ و $\operatorname{Im} u$ و $\operatorname{rg} u$.

2. ليكن $\operatorname{Im} u \ni Q$. أثبت أنه يوجد كثير حدود وحيد $P \in E$ بحيث $u(P) = Q$

$$\text{وبحيث } P(0) = P'(0) = 0$$

التمرين 8. ليكن E فضاءً شعاعياً على حقل تبديلي IK . نفترض أن $n = \dim E$. وليكن

$$u \in \mathcal{L}(E). \text{ أثبت أنّ}$$

$$\ker u = \operatorname{Im} u \Leftrightarrow (u^2 = 0) \wedge (n = 2 \operatorname{rg} u)$$

التمرين 9. ليكن E فضاءً شعاعياً منتهي البعد على حقل تبديلي IK . وليكن u و v عنصرين

من $\mathcal{L}(E)$. نفترض أنّ $E = \operatorname{Im} u + \operatorname{Im} v = \ker u + \ker v$. أثبت أنّ

$$E = \operatorname{Im} u \oplus \operatorname{Im} v = \ker u \oplus \ker v$$

التمرين 10. ليكن E فضاءً شعاعياً منتهي البعد على حقل تبديلي IK . وليكن العنصران u

و v من $\mathcal{L}(E)$. نفترض أنّ $u \circ u - u \circ v + 2u - I_E = 0$. أثبت أنّ $u \circ v = v \circ u$

التمرين 11. ليكن E و F فضاءين شعاعيين على حقل \mathbb{K} . نفترض أن $n = \dim E$. ليكن

$$u \in \mathcal{L}(E, F).$$

1. أياً كان الفضاء الشعاعي الجزئي G من E لدينا

$$\dim u(G) = \dim G - \dim(G \cap \ker u)$$

2. أياً كان الفضاء الشعاعي الجزئي H من F لدينا

$$\dim u^{-1}(H) = n + \dim(H \cap u(E)) - \operatorname{rg} u$$

التمرين 12. ليكن $(a, b) \in \mathcal{C} \times \mathcal{C}$. ولتأمل المجموعة

$$S = \{(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{C}^{\mathbb{N}} : \forall n \geq 0, u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n\}$$

1. أثبت أن S فضاء شعاعي جزئي من $\mathcal{C}^{\mathbb{N}}$ بعده يساوي 2.

2. نفترض أن المعادلة $\lambda^2 - a\lambda - b = 0$ تقبل جذرين مختلفين λ_1 و λ_2 . أثبت أن الجملة

$$((\lambda_1^n)_{n \geq 0}, (\lambda_2^n)_{n \geq 0})$$

تكون أساساً للفضاء S .

3. نفترض أن المعادلة $\lambda^2 - a\lambda - b = 0$ تقبل جذراً مضاعفاً λ . أثبت أنه في هذه الحالة

$$((n\lambda^n)_{n \geq 0}, (\lambda^n)_{n \geq 0})$$

تكون أساساً للفضاء S .

4. لتكن $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ متالية Fibonacci المعرفة تدريجياً كما يلي :

$$\forall n \geq 0, x_{n+2} = x_{n+1} + x_n \text{ و } x_1 = 1, x_0 = 1$$

احسب x_n بدلالة n .



الفصل الثالث

التنوية في الفضاءات الشعاعية

1.III. تنوي فضاء شعاعي

1.III.1. تعريف: ليكن E فضاءً شعاعياً على حقل \mathbb{K} ، نفترضه مختلفاً عن $\{0\}$. نسمي كل تطبيق خطي من E إلى \mathbb{K} شكلاً خطياً على E . ونرمز بالرمز E^* إلى الفضاء الشعاعي $\mathcal{L}(E, \mathbb{K})$. أي فضاء الأشكال الخطية على E . ونسمي E^* الفضاء الشعاعي التنوي لـ E . وأخيراً أيما كان $f \in E^*$ و $x \in E$ نرمز بـ $\langle f, x \rangle$ إلى المقدار $f(x)$.

2.III.1. تعريف:

•• أيما كان $x \in E$ نعرف

$$x^\perp = \{y \in E^* : \langle y, x \rangle = 0\}$$

إن x^\perp فضاء شعاعي جزئي من E^* نسميه الفضاء العمودي على x في E^* .
•• وبوجه عام أيما كانت المجموعة الجزئية غير الخالية A من E نعرف:

$$A^\perp = \{y \in E^* : \forall a \in A, \langle y, a \rangle = 0\} = \bigcap_{a \in A} a^\perp$$

إن A^\perp فضاء شعاعي جزئي من E^* ندعوه الفضاء العمودي على A في E^* .
•• بأسلوب مماثل نعرف، أيما كان $y \in E^*$ ،

$$y^\circ = \{x \in E : \langle y, x \rangle = 0\} = \ker y$$

نسمي y° الفضاء الشعاعي الجزئي العمودي على y في E .
•• وكذلك نعرف، أيما كانت المجموعة الجزئية غير الخالية B من E^* ،

$$B^\circ = \{x \in E : \forall y \in B, \langle y, x \rangle = 0\} = \bigcap_{y \in B} \ker y$$

ونسمي B° الفضاء الشعاعي الجزئي العمودي على B في E .

•• وأخيراً إذا كانت A مجموعة جزئية غير خالية من E و B مجموعة جزئية غير خالية من E^* فإننا نقول إن A و B متعامدان إذا وفقط إذا كان $B \subset A^\perp$ وهذا يكافئ كون $A \subset B^\circ$ أو $\forall a \in A, \forall b \in B, \langle a, b \rangle = 0$.

III-1.3. ملاحظات:

- من الواضح أن $E^\perp = \{0\}$.
- وكذلك يكون $\{0\} = (E^*)^\circ$ إلا أن إثبات هذه الخاصية في الحالة العامة الموافقة لـ $\dim E = +\infty$ يتطلب موضوع الاختيار، وسنرى لاحقاً إثباتاً لهذه الخاصية في حالة $\dim E < +\infty$.

III-1.4. مبرهنة: ليكن E فضاء شعاعياً، مختلفاً عن $\{0\}$ ، على حقل \mathbb{K} . عندئذ

1. أيّاً كان الجزءان غير الخاليين A و B من E ، كان: $A \subset B \Rightarrow B^\perp \subset A^\perp$.
2. أيّاً كان الجزء غير الخالي A من E ، كان $A^\perp = (\text{vect}(A))^\perp$ و $(A^\perp)^\perp = A$.
3. أيّاً كان الجزءان غير الخاليين A و B من E^* ، كان $A \subset B \Rightarrow B^\circ \subset A^\circ$.
4. أيّاً كان الجزء غير الخالي A من E^* ، كان $A^\circ = (\text{vect}(A))^\circ$ و $(A^\circ)^\perp = A$.

الإثبات

□ إثبات هذه الخواص بسيط ومتروك للقارئ.

III-1.5. مبرهنة: ليكن E فضاء شعاعياً، مختلفاً عن $\{0\}$ ، على حقل \mathbb{K} . وليكن H فضاءً شعاعياً جزئياً من E . هناك تكافؤ بين الخواص التالية:

- 1°. تمام بعد H يساوي 1 أي $\text{codim}_E H = 1$.
- 2°. H هو نواة شكل خطي غير معدوم.
- 3°. يوجد مستقيم شعاعي D (أي فضاء جزئي بعده 1) بحيث $H \oplus D = E$.

الإثبات

1° \Leftrightarrow 2°. لئلا كان $\dim E/H = \dim \mathbb{K} = 1$ ، يوجد تشاكل خطي تقابلي

$$\theta: E/H \rightarrow \mathbb{K}$$

ليكن $\varrho: E \rightarrow E/H$ الغمر القانوني عندئذ يكون $\varrho = \theta \circ f$ شكلاً خطياً يحقق $H = \ker f$ ، وبالمطع $f \neq 0$ لأن $E \neq H$.

2° \Leftrightarrow 3°. لنفرض أن $H = \ker f$ حيث f شكل خطي من $E \setminus \{0\}$. إن f غامر لأنه غير معدوم، إذن يوجد $b \in E$ بحيث $\langle f, b \rangle = 1$. لنضع $D = \mathbb{K}b$.

إذا كان $x \in D \cap H$ كان $\lambda b = x$ حيث $\lambda \in \mathbb{K}$ وكان $\langle f, x \rangle = 0$ ، ومن ثمّ يكون $\lambda = \lambda \langle f, b \rangle = 0$. ينتج من ذلك أنّ $x = 0$ ومنه $D \cap H = \{0\}$.
من جهة أخرى، أيّاً كان $x \in E$ لدينا

$$x = \underbrace{\langle f, x \rangle \cdot b}_{\in D} + \underbrace{x - \langle f, x \rangle \cdot b}_{\in H}$$

إذن $E = H \oplus D$.

3° \Leftarrow 1°. ليكن P الإسقاط على D توازياً مع H إنّ $H = \ker P$ و $D = \text{Im } P$ ومن ثمّ يكون هناك تقابل خطّي بين $E/H = E/\ker P$ و $\text{Im } P$ وذلك استناداً إلى المبرهنة 5.1-2.
إذن $\text{codim}_E H = \dim E/H = \dim D = 1$. \square

III.1-6. تعريف: ليكن E فضاءً شعاعياً على حقل \mathbb{K} . نسمّي مستقيماً في E كل فضاء شعاعي جزئي D بعده 1 في E . ونسمّي مستوياً في E كل فضاء شعاعي جزئي P بعده 2 في E . وأخيراً نسمّي مستوياً فوقياً في E كل فضاء شعاعي جزئي H تمام بعده 1 في E .

III.1-7. مبرهنة: ليكن E فضاءً شعاعياً، مختلفاً عن $\{0\}$ ، على حقل \mathbb{K} . وليكن H مستوياً فوقياً في E . عندئذ يكون H^\perp مستقيماً شعاعياً في E° .

الإثبات

لنفترض أنّ $H = \ker y$ حيث $y \in E^\circ \setminus \{0\}$. لأنّ الشكل الخطّي y غامر، يوجد $a \in E$ بحيث $\langle y, a \rangle = 1$.

من جهة أولى، من الواضح أنّ $y \in H^\perp$ ومن ثمّ $\mathbb{K} \cdot y \subset H^\perp$.
ومن جهة ثانية، ليكن $z \in H^\perp$ ، عندئذ لّا كان

$$\forall x \in E, \quad x = \underbrace{\langle y, x \rangle a}_{\in \mathbb{K} \cdot a} + \underbrace{x - \langle y, x \rangle a}_{\in H}$$

كان $\langle z, x \rangle = \langle y, x \rangle \langle z, a \rangle$ ، أو $\langle z, a \rangle \cdot y = z$. إذن $\mathbb{K} \cdot y \ni z$ ، وهذا ما يثبت صحة المساواة $H^\perp = \mathbb{K} \cdot y$. \square

III.1.8. تعريف: ليكن E فضاء شعاعياً، مختلفاً عن $\{0\}$ ، على حقل IK . وليكن y شكلاً خطياً من $\{0\} \neq E^*$ وليكن $H = \ker y$. عندئذ نسمي المعادلة $\langle y, x \rangle = 0$ معادلة المستوى الفوقي H . ذلك لأن $x \in H \Leftrightarrow \langle y, x \rangle = 0$.

III.2. منقول تطبيق خطي

III.2.1. تعريف: ليكن E و F فضاءين شعاعيين على حقل K ، وليكن u تطبيقاً خطياً من E إلى F أي $u \in \mathcal{L}(E, F)$. نعرف التطبيق الخطي ${}^t u$ $\in \mathcal{L}(F^*, E^*)$ كما يلي:

$${}^t u : F^* \rightarrow E^*, y \mapsto {}^t u(y) = y \circ u$$

ونسمي ${}^t u$ منقول التطبيق u . لاحظ أن:

$$\forall x \in E, \forall y \in F^*, \langle {}^t u(y), x \rangle_{E^*, E} = \langle y, u(x) \rangle_{F^*, F}.$$

III.2.2. مبرهنة: ليكن E و F فضاءين شعاعيين على حقل IK .

1. إن التطبيق ${}^t u$ $u \mapsto {}^t u$ ، $\Phi : \mathcal{L}(E, F) \rightarrow \mathcal{L}(F^*, E^*)$ ، خطي ومتباين.
2. أياً كان $u \in \mathcal{L}(E, F)$ و $v \in \mathcal{L}(F, G)$ ، كان ${}^t(v \circ u) = {}^t v \circ {}^t u$.
3. ليكن I_E (على التوالي I_{E^*}) التطبيق المطابق على E (على E^*)، إذن ${}^t I_E = I_{E^*}$.
4. إذا كان $u \in \mathcal{L}(E, F)$ تقابلاً كان ${}^t u$ تقابلاً أيضاً و كان $({}^t u)^{-1} = (u^{-1})^t$.
5. إذا كان $u \in \mathcal{L}(E, F)$ كان $\ker({}^t u) = (\operatorname{Im} u)^\perp$. ومن ثم إذا كان u غامراً كان ${}^t u$ متبايناً.

الإثبات

1. ليكن u و v من $\mathcal{L}(E, F)$ وليكن $\lambda \in IK$. عندئذ، أياً كان $(x, y) \in E \times F^*$ ، يكن

$$\begin{aligned} \langle \Phi(u + \lambda v)(y), x \rangle_{E^*, E} &= \langle {}^t(u + \lambda v)(y), x \rangle_{E^*, E} = \langle y, (u + \lambda v)(x) \rangle_{F^*, F} \\ &= \langle y, u(x) + \lambda v(x) \rangle_{F^*, F} = \langle y, u(x) \rangle_{F^*, F} + \lambda \langle y, v(x) \rangle_{F^*, F} \\ &= \langle {}^t u(y), x \rangle_{E^*, E} + \lambda \langle {}^t v(y), x \rangle_{E^*, E} \\ &= \langle {}^t u(y) + \lambda {}^t v(y), x \rangle_{E^*, E} \\ &= \langle {}^t(u + \lambda v)(y), x \rangle_{E^*, E} = \langle \Phi(u + \lambda v)(y), x \rangle_{E^*, E} \end{aligned}$$

فالتطبيق Φ خطي.

ومن جهة أخرى، التطبيق Φ متباين لأنَّ

$$\begin{aligned} u \in \ker \Phi &\Rightarrow \forall (x, y) \in E \times F^*, \quad \langle y, u(x) \rangle_{F^*, F} = 0 \\ &\Rightarrow \forall x \in E, \quad u(x) \in (F^*)^\circ = \{0\} \\ &\Rightarrow \forall x \in E, \quad u(x) = 0 \\ &\Rightarrow u = 0 \end{aligned}$$

وهذا ما يثبت الخاصّة 1.

2. ليكن $u \in \mathcal{L}(E, F)$ و $v \in \mathcal{L}(F, G)$. عندئذ، أيّاً كان (x, y) من $E \times G^*$ ، يَكُنْ

$$\begin{aligned} \langle {}^t(v \circ u)(y), x \rangle_{E^*, E} &= \langle y, v \circ u(x) \rangle_{G^*, G} = \langle y, v(u(x)) \rangle_{G^*, G} \\ &= \langle {}^t v(y), u(x) \rangle_{F^*, F} \\ &= \langle {}^t u({}^t v(y)), x \rangle_{E^*, E} = \langle {}^t u \circ {}^t v(y), x \rangle_{E^*, E} \end{aligned}$$

ومن ثَمَّ $(v \circ u)^t = {}^t u \circ {}^t v$.

3. واضح من التعريف.

4. نتج هذه الخاصّة من أخذ المقلوب في طرفي المساواتين:

$$u^{-1} \circ u = I_E \quad \text{و} \quad u \circ u^{-1} = I_F$$

فنجعل باستخدام ما سبق أنّ

$$({}^t u \circ {}^t (u^{-1}))^t = {}^t I_E = I_{E^*} \quad \text{و} \quad ({}^t (u^{-1}) \circ {}^t u)^t = {}^t I_F = I_{F^*}$$

فالتطبيق ${}^t u$ تقابلٌ و $({}^t u)^{-1} = {}^t (u^{-1})$.

5. نتجم هذه الخاصّة من التكافؤات التالية:

$$\begin{aligned} f \in \ker({}^t u) &\Leftrightarrow f \circ u = 0 \\ &\Leftrightarrow \forall x \in E, \langle f, u(x) \rangle = 0 \\ &\Leftrightarrow \forall y \in \text{Im } u, \langle f, y \rangle = 0 \\ &\Leftrightarrow f \in (\text{Im } u)^\perp \end{aligned}$$

□

ومن ثَمَّ إذا كان u غامراً كان ${}^t u$ متبايناً.

3.III. الثنوية في الفضاءات الشعاعية المنتهية البعد

ليكن E فضاءً شعاعياً، مختلفاً عن $\{0\}$ ، ومنتهي البعد على حقل تبديلي IK . عندئذ يكون الفضاء الثنوي E^* منتهي البعد و يكون: $\dim E^* = \dim \mathcal{L}(E, IK) = \dim E$.

3.III.1. تعريف: ليكن E فضاءً شعاعياً، مختلفاً عن $\{0\}$ ، ومنتهي البعد على حقل تبديلي IK . وليكن $\mathcal{E} = (e_1, \dots, e_n)$ أساساً لـ E . لتعرف الجملة $\mathcal{E}^* = (e_1^*, \dots, e_n^*)$ من E^* بالعلاقات:

$$e_j^*(e_i) = \langle e_j^*, e_i \rangle = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & : i = j \\ 0 & : i \neq j \end{cases}$$

عندئذ تكون الجملة \mathcal{E}^* أساساً لـ E^* نسميه الأساس الثنوي للأساس \mathcal{E} . وتحقق العلاقات التالية:

$$\forall f \in E^*, \quad f = \sum_{i=1}^n \langle f, e_i \rangle \cdot e_i^*$$

$$\forall x \in E, \quad x = \sum_{i=1}^n \langle e_i^*, x \rangle \cdot e_i$$

والتي تُبرز تسمية الأساس \mathcal{E}^* بالأساس الثنوي.

3.III.2. مبرهنة: ليكن E فضاءً شعاعياً، مختلفاً عن $\{0\}$ ، ومنتهي البعد على حقل تبديلي IK . وليكن x عنصراً من $E \setminus \{0\}$. عندئذ يوجد شكل خطي $f \in E^*$ بحيث يكون $f(x) = 1$.

الإثبات

لتضع $e_1 = x$ ، ولتتمم (e_1) إلى أساس $\mathcal{E} = (e_1, \dots, e_n)$ لـ E . ثم نأخذ الأساس الثنوي $\mathcal{E}^* = (e_1^*, \dots, e_n^*)$. لهذا الأساس. عندئذ يحقق $f = e_1^*$ المطلوب. ينتج من هذه المبرهنة أن $(E^*)^0 = \{0\}$. \square

3.III.2. مبرهنة: ليكن E فضاءً شعاعياً، مختلفاً عن $\{0\}$ ، ومنتهي البعد على حقل IK . عندئذ يكون التطبيق: $\Psi: E \rightarrow E^{**}: x \mapsto \Psi(x)$ المعرف بالعلاقة $\langle \Psi(x), f \rangle = \langle f, x \rangle$ حين يكون $(x, f) \in E \times E^*$ ، تقابلاً خطياً.

الإثبات

لما كان $\dim E^{**} = \dim E$ يكفي أن نثبت أن التطبيق Ψ خطي ومتباين. النقطة الأولى واضحة، والثانية تنتج من المساواة $\ker \Psi = (E^*)^\circ - \{0\}$. وبذلك يتم المطلوب. \square

III-3.3. البرهنة: ليكن E فضاءً شعاعياً، مختلفاً عن $\{0\}$ ، رتبته البعد على حقل IK . وليكن $\mathcal{F} = (f_1, \dots, f_n)$ أساساً لـ E^* . عندئذ يوجد أساس $\mathcal{E} = (e_1, \dots, e_n)$ لـ E بحيث يكون \mathcal{F} أساسه الثوري.

الإثبات

ليكن $\mathcal{F}^* = (f_1^*, \dots, f_n^*)$ الأساس الثوري لـ \mathcal{F} في E^{**} . ولنضع $e_j = \Psi^{-1}(f_j^*)$ أياً كان $j \in \mathbb{N}_n$ ، حيث Ψ هو التقابل الخطي القانوني بين E و E^{**} الوارد في البرهنة السابقة، فيكون:

$$\forall (i, j) \in \mathbb{N}_n^2, \quad \langle f_i, e_j \rangle_{E^*, E} = \langle \Psi(e_j), f_i \rangle_{E^{**}, E^*} = \langle f_j^*, f_i \rangle_{E^{**}, E^*} = \delta_{i,j}$$

إذن \mathcal{F} هو الأساس الثوري لـ $\mathcal{E} = (e_1, \dots, e_n)$.

III-3.4. البرهنة: ليكن E فضاءً شعاعياً، مختلفاً عن $\{0\}$ ، ومتبني البعد على حقل IK .

1. أياً كان الفضاء الشعاعي الجزئي F من E لدينا:

$$F = (F^\perp)^\circ \quad \text{و} \quad \dim F + \dim F^\perp = \dim E$$

2. أياً كان الفضاء الشعاعي الجزئي G من E^* لدينا:

$$G = (G^\circ)^\perp \quad \text{و} \quad \dim G + \dim G^\circ = \dim E$$

الإثبات

1. ليكن (e_1, \dots, e_p) أساساً لـ F ، ولتضمه إلى أساس $\mathcal{E} = (e_1, \dots, e_n)$ لـ E ، وليكن $\mathcal{E}^* = (e_1^*, \dots, e_n^*)$ الأساس الثوري لـ \mathcal{E} . عندئذ، أياً كان $j \in \mathbb{N}_p$ ، فإن

$$\begin{aligned} f \in F^\perp &\Leftrightarrow \forall i \in \mathbb{N}_p, \quad \langle f, e_i \rangle = 0 \\ &\Leftrightarrow f = \sum_{i=p+1}^n \langle f, e_i \rangle \cdot e_i^* \\ &\Leftrightarrow f \in \text{vect}(e_{p+1}^*, \dots, e_n^*) \end{aligned}$$

$$\text{إذن} \quad \dim F^\perp = n - \dim F \quad \text{و} \quad F^\perp = \text{vect}(e_{p+1}^*, \dots, e_n^*)$$

2. ليكن $\mathcal{F} = (f_1, \dots, f_p)$ أساساً لـ E^* حُصل عليه بإتمام الأساس (f_1, \dots, f_p) للفضاء الجزئي G إلى أساس لـ E^* . وليكن $\mathcal{E} = (e_1, \dots, e_n)$ الأساس في E الذي أساسه التثوي هو \mathcal{F} . عندئذٍ أيًا كان $x \in E$ فلدينا

$$\begin{aligned} x \in G^\circ &\Leftrightarrow \forall i \in \mathbb{N}_p, \langle f_i, x \rangle = 0 \\ &\Leftrightarrow x = \sum_{i=p+1}^n \langle f_i, x \rangle \cdot e_i \\ &\Leftrightarrow x \in \text{vect}(e_{p+1}, \dots, e_n) \end{aligned}$$

ومن ثَمَّ يكون $G^\circ = \text{vect}(e_{p+1}, \dots, e_n)$ و $\dim G^\circ = n - \dim G$.

من ناحية أخرى، من الواضح أن $F \subset (F^\perp)^\circ$ ، ولكن

$$\dim(F^\perp)^\circ = n - \dim F^\perp = n - (n - \dim F) = \dim F$$

ومنه المساواة $F = (F^\perp)^\circ$ ، ونترك للقارئ أن يثبت بأسلوب مماثل أن $G = (G^\circ)^\perp$. □

III.3.5. مبرهنة: ليكن E و F فضاءين شعاعيين، غير تافهين، ومنتهي البعد على حقل \mathbb{K} .

وليكن $u \in \mathcal{L}(E, F)$ ، عندئذٍ يكون $\text{rg}(u) = \text{rg}({}^t u)$.

الإثبات

في الحقيقة، لقد وجدنا أن $\ker {}^t u = (\text{Im } u)^\perp$ ، إذن:

$$\begin{aligned} \text{rg}({}^t u) &= \dim F^\circ - \dim \ker {}^t u = \dim F^\circ - \dim (\text{Im } u)^\perp \\ &= \dim F^\circ - (\dim F^\circ - \dim \text{Im } u) = \dim \text{Im } u = \text{rg}(u) \end{aligned}$$

وهذا هو المطلوب إثباته. □

III.3.6. مبرهنة: ليكن E فضاءً شعاعياً منتهي البعد على حقل \mathbb{K} . وليكن (f_1, \dots, f_r) جملة

من الأشكال الخطية على E . عندئذٍ تكون الخاصتان التاليتان متكافئتين:

$$1. \exists (\lambda_1, \dots, \lambda_r) \in \mathbb{K}^r, \quad f = \sum_{k=1}^r \lambda_k f_k$$

$$2. \forall x \in \bigcap_{i=1}^r \ker f_i, \quad f(x) = 0$$

الإثبات

في الحقيقة، لدينا

$$\square \quad \left(\bigcap_{i=1}^r \ker f_i \right)^\perp = \left((f_1, \dots, f_r)^\circ \right)^\perp = \left((\text{vect}(f_1, \dots, f_r))^\circ \right)^\perp = \text{vect}(f_1, \dots, f_r)$$

تمارين

التمرين 1. ليكن E و F فضاءين شعاعيين على الحقل IK ، وليكن $u \in \mathcal{L}(E, F)$ تطبيقاً خطياً غامراً. أثبت أن u' متباين.

التمرين 2. ليكن E و F فضاءين شعاعيين منتهي البعد على الحقل IK ، وليكن $u \in \mathcal{L}(E, F)$ أثبت أن:

$$\ker u' = (\operatorname{Im} u)^\perp, \quad \operatorname{Im} u' = (\ker u)^\perp$$

التمرين 3. ليكن E فضاءً شعاعياً منتهي البعد على الحقل IK ، وليكن V_1 و V_2 فضاءين شعاعيين جزئيين من E ، وليكن W_1 و W_2 فضاءين شعاعيين جزئيين من E^* . قارن بين $(V_1 + V_2)^\perp$ و $V_1^\perp \cap V_2^\perp$ ، وبين $(V_1 \cap V_2)^\perp$ و $V_1^\perp + V_2^\perp$ ، وبين $(W_1 + W_2)^\circ$ و $W_1^\circ \cap W_2^\circ$ ، وبين $(W_1 \cap W_2)^\circ$ و $W_1^\circ + W_2^\circ$.

التمرين 4. ليكن E فضاءً شعاعياً على الحقل IK ، وليكن $(f, g) \in (E^*)^2$. نفترض أنه أياً كان x من E لدينا $f(x)g(x) = 0$. أثبت أن $f = 0$ أو $g = 0$.

التمرين 5. ليكن E فضاءً شعاعياً على الحقل IK ، أثبت صحة القضيتين التاليتين:

(\mathcal{B}_k) لكن (ℓ_1, \dots, ℓ_k) جملة حرة من عناصر E^* . يوجد جملة (x_1, \dots, x_k) من

عناصر E بحيث يكون $\ell_i(x_j) = \delta_{ij}$ أيًا كان $(i, j) \in \mathbb{N}_k^2$.

(\mathcal{B}_k) لكن (ℓ_1, \dots, ℓ_k) جملة حرة من عناصر E^* . وليكن ℓ من E^* بحيث

$$\ell = \sum_{i=1}^k \lambda_i \ell_i \quad \text{حيث } IK \text{ يوجد } \lambda_1, \dots, \lambda_k \text{ من } IK \text{ بحيث } \bigcap_{i=1}^k \ker(\ell_i) \subset \ker(\ell)$$

واستنتج أنه أياً كانت الجملة (ℓ_1, \dots, ℓ_k) من عناصر E^* ، هناك تكافؤ بين القضيتين:

$$\ell \in \operatorname{vect}(\ell_1, \dots, \ell_k) \quad \text{و} \quad \bigcap_{i=1}^k \ker(\ell_i) \subset \ker(\ell)$$

التمرين 6. ليكن E فضاءً شعاعياً منتهي البعد على الحقل \mathbb{K} ، وليكن (ℓ_1, \dots, ℓ_k) جملة حرة من عناصر E^* . أثبت أن:

$$\dim \left(\bigcap_{i=1}^k \ker(\ell_i) \right) = \dim E - k$$

التمرين 7. ليكن $E = \mathbb{R}_2[X]$ فضاء كثيرات الحدود ذات الأمتال الحقيقية والتي لا تزيد درجتها عن 2، وليكن φ_1 و φ_2 و φ_3 العناصر من E^* المعرفة بـ:

$$\varphi_1(P) = P(1), \quad \varphi_2(P) = P'(1), \quad \varphi_3(P) = \int_0^1 P(t) dt$$

أثبت أن $(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$ أساس للفضاء E^* وحدد أساساً لـ E يكون $(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$ أساسه الثنائي.

التمرين 8. ليكن $E = \mathbb{R}_3[X]$ فضاء كثيرات الحدود ذات الأمتال الحقيقية والتي لا تزيد درجتها عن 3، وليكن φ_1 و φ_2 و φ_3 و φ_4 العناصر من E^* المعرفة بـ:

$$\varphi_1(P) = P(0), \quad \varphi_2(P) = P(1), \quad \varphi_3(P) = P'(0), \quad \varphi_4(P) = P'(1)$$

1. أثبت أن $(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4)$ أساس لـ E^* وحدد أساساً لـ E يكون الأساس $(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4)$ أساسه الثنائي.

2. عبّر عن الشكل الخطي $\psi \in E^*$ المعرفة بـ $\psi(P) = \int_0^1 P(t) dt$ بدلالة عناصر الأساس السابق.

التمرين 9. ليكن $E = \mathbb{R}_n[X]$ فضاء كثيرات الحدود ذات الأمتال الحقيقية والتي لا تزيد درجتها عن n . في حالة كل عدد حقيقي α نضع: $\varphi_\alpha : E \rightarrow \mathbb{R}, P \mapsto P(\alpha)$.

1. تحقق أنه أيما كان العدد الحقيقي α ، $\varphi_\alpha \in E^*$.

2. لنكن x_0, x_1, \dots, x_n أعداداً حقيقية مختلفة مثنى مثنى. أثبت أن $(\varphi_{x_0}, \varphi_{x_1}, \dots, \varphi_{x_n})$ أساس للفضاء E^* وحدد أساسه الثنائي.

3. أثبت أنه توجد متتالية منتهية وحيدة $(\lambda_i)_{0 \leq i \leq n} \in \mathbb{R}^{n+1}$ تحقق:

$$\forall P \in E, \quad \int_0^1 P(x) dx = \sum_{i=0}^n \lambda_i P(x_i)$$

التمرين 10. ليكن $E = \mathbb{R}_n[X]$ فضاء كثيرات الحدود ذات الأمتال الحقيقية والتي لا تزيد درجتها عن n .

1. ليكن $e_k(X) = (X + \alpha)^k$ ، أوجد الأساس التآوي $(e_k^*)_{0 \leq k \leq n}$ للأساس $(e_k)_{0 \leq k \leq n}$.

من E . عر عن الشكل الخطي $\varphi: P \mapsto \int_0^1 P(t) dt$ بدلالة عناصر هذا الأساس.

2. ليكن الشكل الخطي Δ المعرفة $\Delta(P)(X) = P(X+1) - P(X)$ ، و ليكن الشكل

الخطي φ_k المعرفة بالعلاقة $\Delta^k(P)(0) = \varphi_k(P)$. أثبت أن $(\varphi_k)_{0 \leq k \leq n}$ أساس للفضاء

E^* وأوجد الأساس $(e_k)_{0 \leq k \leq n}$ في E الذي أساسه التآوي $(\varphi_k)_{0 \leq k \leq n}$.

التمرين 11. لتكن \mathcal{E} مجموعة المصفوفات $M = (a_{ij})$ من $M_n(\mathbb{R})$ التي تحقق:

$$\exists s \in \mathbb{R}, \forall i \in \mathbb{N}_n, \sum_{j=1}^n a_{ij} = s, \quad \forall j \in \mathbb{N}_n, \sum_{i=1}^n a_{ij} = s$$

نرمز بـ $\delta(M)$ إلى s .

1. أثبت أن \mathcal{E} فضاء شعاعي جزئي من $M_n(\mathbb{R})$ وأن δ شكل خطي على \mathcal{E} .

2. أثبت أن جداء عنصرين من \mathcal{E} هو عنصر من \mathcal{E} .

3. لتكن المصفوفة $J = (a_{ij})$ التي تحقق $a_{ij} = 1, \forall (i, j) \in \mathbb{N}_n^2$. أثبت أن:

$$(A \in \mathcal{E}) \Leftrightarrow (\exists s: AJ = JA = sJ)$$

4. أثبت أنه إذا كانت المصفوفة A من \mathcal{E} قلوبية فإن $A^{-1} \in \mathcal{E}$.

5. أثبت أن $J \in \ker \delta \oplus \mathbb{R} \cdot J$ وأوجد $\dim \mathcal{E}$.

6. ليكن $\overline{\mathcal{E}}$ مجموعة المصفوفات $M = (a_{ij})$ من $M_n(\mathbb{R})$ التي تحقق:

$$\begin{aligned} \exists s \in \mathbb{R}, \forall i \in \mathbb{N}_n, \sum_{j=1}^n a_{ij} = s, \quad \forall j \in \mathbb{N}_n, \sum_{i=1}^n a_{ij} = s, \\ \sum_{k=1}^n a_{kk} = \sum_{k=1}^n a_{k, n+1-k} = s \end{aligned}$$

أثبت أن $\overline{\mathcal{E}}$ فضاء شعاعي جزئي من $M_n(\mathbb{R})$ وأوجد بعده.

^{R2} يفترض هذا التمرين دراية القارئ بمفاهيم الفصل الرابع.

التمرين 12. لتكن متتالية كثيرات الحدود $(P_n)_{n \geq 0}$ المعرفة كما يلي:

$$P_0(X) = 1, \quad P_1(X) = X, \quad \forall n \geq 2, \quad P_n(X) = \frac{1}{n!} X(X-n)^{n-1}$$

1. تحقق أنه أياً كان $1 \leq n$ لدينا $P'_n(X) = P_{n-1}(X-1)$. واستنتج أن:

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geq k, \quad P_n^{(k)}(X) = P_{n-k}(X-k)$$

2. لتكن $k \in \mathbb{N}$ ، نعرف على $\mathbb{R}[X]$ الشكل الخطي φ_k بالعلاقة: $\varphi_k(P) = P^{(k)}(k)$.

أوجد $\varphi_k(P_n)$.

3. نفترض الآن أن m عدد طبيعي موجب تماماً ونرمز بـ $E = \mathbb{R}_m[X]$ لفضاء كثيرات

الحدود ذات الأمتال الحقيقية التي لا تزيد درجتها عن m . أثبت أن P_0, P_1, \dots, P_m أساس لـ E . أوجد أساسه المتوحي.

4. أثبت أن $\forall Q \in E, \quad Q(X) = \sum_{k=0}^m Q^{(k)}(k) P_k(X)$.

5. استنتج أن $\forall a \in \mathbb{R}, \quad P_m(X+a) = \sum_{k=0}^m P_{m-k}(a) P_k(X)$.



الفصل الرابع

المصفوفات

1.1.1. مفهوم المصفوفة

لنذكر بالرمز $\mathbb{I}N_n$ الذي يرمز إلى مجموعة الأعداد الطبيعية الواقعة بين 1 و $n \in \mathbb{I}N$.
وسنرمز في بقية هذه الفقرة بالرمز A إلى حلقة تبديلية ما.

1.1.1. تعريف: نسمي مصفوفة من عناصر الحلقة A بـ n سطراً و p عموداً، كل تطبيق

منطلقه المجموعة $\mathbb{I}N_n \times \mathbb{I}N_p$ يأخذ قيمه في A . ونرمز بالرمز $M_{n \times p}(A)$ إلى مجموعة

المصفوفات بـ n سطراً و p عموداً من عناصر الحلقة A .

ولقد جرت العادة أن نختل مصفوفة M من $M_{n \times p}(A)$ بالشكل:

$$M = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & \cdots & a_{np} \end{bmatrix} = (a_{ij})_{(i,j) \in \mathbb{I}N_n \times \mathbb{I}N_p}$$

1.1.2. تعريف:

• نسمي مصفوفة جزئية من مصفوفة $M \in M_{n \times p}(A)$ مقصوراً M على مجموعة جزئية

من النمط $\mathbb{I}N_n \times \mathbb{I}N_p \supset I \times J$ ونرمز إلى هذه المصفوفة الجزئية بالرمز $M_{I,J}$.

• نسمي مصفوفة سطر (أو مصفوفة عمود) كل عنصر من $M_{1,p}(A)$ (أو $M_{n,1}(A)$).

• نسمي مصفوفة مربعة من المرتبة n كل عنصر من $M_{n \times n}(A)$ ، ونرمز إلى مجموعة

المصفوفات المربعة من المرتبة n بالرمز $M_n(A)$.

• نسمي مصفوفة مثلثية عليا كل مصفوفة مربعة $M \in M_n(A)$ ، تحقق

$$i > j \Rightarrow a_{ij} = 0$$

• نسمي مصفوفة مثلثية سفلى كل مصفوفة مربعة $M \in M_n(A)$ ، تحقق

$$i < j \Rightarrow a_{ij} = 0$$

• وأخيراً نسمي مصفوفة قطريّة كل مصفوفة مربعة $M \in \mathcal{M}_n(A)$ ، δ_{ij} تحقق

$$i \neq j \Rightarrow \delta_{ij} = 0$$

ونسمي المصفوفة $I_n = (a_{ij})$ من $\mathcal{M}_n(A)$ المعرفة بـ δ_{ij} ، حيث δ_{ij} هو رمز Kronecker المصفوفة الواحدية في $\mathcal{M}_n(A)$.

2.IV. العمليات على المصفوفات

سنفترض في هذه الفقرة أيضاً أنّ A حلقة تبديلية. لكن $(n, p) \in \mathbb{N}^2$ يمكننا تزويد

$\mathcal{M}_{n \times p}(A)$ بقانوني تشكيل، أولهما داخلي (+) معرف كما يلي:

أيّاً كانت $M \in \mathcal{M}_{n \times p}(A)$ و $N \in \mathcal{M}_{n \times p}(A)$ فإنّ

$$M + N = (a_{ij} + b_{ij})_{(i,j) \in \mathbb{N}_n \times \mathbb{N}_p}$$

ولانيهما خارجي (·) ، مجموعة مؤثراته A ، ومعرف كما يلي:

أيّاً كانت $M \in \mathcal{M}_{n \times p}(A)$ و $\lambda \in A$ فإنّ

$$\lambda \cdot M = (\lambda a_{ij})_{(i,j) \in \mathbb{N}_n \times \mathbb{N}_p}$$

ونتحقق بسهولة أنّ $(\mathcal{M}_{n \times p}(A), +, \cdot)$ زمرة تبديلية وأنّ

$$\forall M \in \mathcal{M}_{n \times p}(A), \quad 1_A \cdot M = M \quad .1$$

$$\forall \lambda \in A, \quad \forall (M, N) \in (\mathcal{M}_{n \times p}(A))^2, \quad \lambda \cdot (M + N) = \lambda \cdot M + \lambda \cdot N \quad .2$$

$$\forall (\lambda, \mu) \in A^2, \quad \forall M \in \mathcal{M}_{n \times p}(A), \quad (\lambda + \mu) \cdot M = \lambda \cdot M + \mu \cdot M \quad .3$$

$$\forall (\lambda, \mu) \in A^2, \quad \forall M \in \mathcal{M}_{n \times p}(A), \quad \lambda \cdot (\mu \cdot M) = (\lambda \mu) \cdot M \quad .4$$

فإذا كانت الحلقة A حقلاً \mathbb{K} كانت البنية $(\mathcal{M}_{n \times p}(\mathbb{K}), +, \cdot)$ فضاءً شعاعياً على الحقل \mathbb{K} .

ومن جهة أخرى، أيّاً كانت $(n, p, q) \in \mathbb{N}^3$ ، نعرف قانون ضرب المصفوفات كما يلي:

$$X : \mathcal{M}_{n \times p}(A) \times \mathcal{M}_{p \times q}(A) \rightarrow \mathcal{M}_{n \times q}(A), \quad (M, N) \mapsto L = M \times N$$

فإذا كان $M \in \mathcal{M}_{n \times p}(A)$ و $N \in \mathcal{M}_{p \times q}(A)$ كانت $L \in \mathcal{M}_{n \times q}(A)$ فإنّ

حيث

$$\forall (i, j) \in \mathbb{N}_n \times \mathbb{N}_q, \quad c_{ij} = \sum_{k=1}^p a_{ik} b_{kj}$$

هذا ونصح، بترتيب المصفوفات كما في الشكل التالي ليسهل إجراء عملية الضرب هذه:

$$\begin{array}{c}
 \begin{matrix} & & N & & \\ & & \begin{bmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1j} & \cdots & b_{1p} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{p1} & \cdots & b_{pj} & \cdots & b_{pq} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ & & \vdots & & \vdots \end{bmatrix} & & \\ & & L & & \end{matrix} \\
 M \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1p} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ip} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{np} \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \cdots & \cdots & \cdots \\ \vdots & & \vdots \\ c_{ij} & \cdots & \cdots \\ \vdots & & \vdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \end{bmatrix}
 \end{array}$$

تبيّن المبرهنة التالية خاصّة هامة من خواص ضرب المصفوفات:

1.2.IV. مبرهنة: لنكن $(n, p, q, r) \in \mathbb{N}^{*4}$ ، ولنكن $M_n(A) \ni M$ و $M_{p,q}(A) \ni N$ و $M_{q,r}(A) \ni L$ عندئذ يكون $(M \times N) \times L = M \times (N \times L)$.

الإثبات

لتفرض أنّ $(a_{ij}) = M$ و $(b_{ij}) = N$ و $(c_{ij}) = L$. عندئذ يكون

$$\forall (i, j) \in \mathbb{N}_n \times \mathbb{N}_q, \quad [M \times N]_{ij} = \sum_{k=1}^p a_{ik} b_{kj}$$

وكذلك يكون $\forall (i, j) \in \mathbb{N}_n \times \mathbb{N}_r, \quad [(M \times N) \times L]_{ij} = \sum_{m=1}^q [M \times N]_{im} c_{mj}$

ومن ثم $\forall (i, j) \in \mathbb{N}_n \times \mathbb{N}_r, \quad [(M \times N) \times L]_{ij} = \sum_{m=1}^q \left(\sum_{k=1}^p a_{ik} b_{km} \right) c_{mj}$

و أخيراً $\forall (i, j) \in \mathbb{N}_n \times \mathbb{N}_r, \quad [(M \times N) \times L]_{ij} = \sum_{m=1}^q \sum_{k=1}^p a_{ik} b_{km} c_{mj}$

ومن جهة أخرى، $\forall (i, j) \in \mathbb{N}_p \times \mathbb{N}_r, \quad [N \times L]_{ij} = \sum_{m=1}^q b_{im} c_{mj}$

إذن $\forall (i, j) \in \mathbb{N}_n \times \mathbb{N}_r, \quad [M \times (N \times L)]_{ij} = \sum_{k=1}^p a_{ik} [N \times L]_{kj}$

ومن ثم $\forall (i, j) \in \mathbb{N}_n \times \mathbb{N}_r, \quad [M \times (N \times L)]_{ij} = \sum_{k=1}^p a_{ik} \left(\sum_{m=1}^q b_{km} c_{mj} \right)$

و أخيراً $\forall (i, j) \in \mathbb{N}_n \times \mathbb{N}_r, \quad [M \times (N \times L)]_{ij} = \sum_{m=1}^q \sum_{k=1}^p a_{ik} b_{km} c_{mj}$

□

ومنه نستنتج أنّ $(M \times N) \times L = M \times (N \times L)$.

2.2.IV. ملاحظات :

- إنَّ قانون ضرب المصفوفات قانون تشكيل داخلي على مجموعة المصفوفات المربعة من المرتبة n أي $M_n(A)$. وتصبح بذلك البنية $(M_n(A), +, \times)$ حلقة، حيادي الضرب فيها هو المصفوفة الواحدية I_n . وتكون الحلقة $M_n(A)$ غير تبديلية أيًا كانت $n \geq 2$ ، كما يبين المثال التالي:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

وتُصبح البنية $(M_n(A), +, \cdot, \times)$ جبراً غير تبديلي على الحلقة A .

- نقول عن مصفوفة M من $M_n(A)$ إنها قَلْوِيَّة إذا وفقط إذا كانت عنصراً قَلْوِيّاً في الحلقة $(M_n(A), +, \times)$ ، ونرمز بالرمز $\mathcal{CL}_n(A)$ إلى زمرة العناصر القَلْوِيَّة في $(M_n(A), +, \times)$.
- عند ضرب مصفوفتين M و N نكتب جداء الضرب عادة MN عوضاً عن $M \times N$.

سنفترض في بقية الفصل أنَّ الحلقة A حقل تبديلي نرمز إليه بالرمز \mathbb{K} .

3.2.IV. مبرهنة: إنَّ $(M_{n,p}(\mathbb{K}), +, \cdot)$ فضاء شعاعي منتهي البعد على \mathbb{K} ، بُعده يساوي np .

الإثبات

إنَّ إثبات كون الفضاء $M_{n,p}(\mathbb{K})$ فضاءً شعاعياً على \mathbb{K} ، أمر سهل ومتروك للقارئ.

لتعرّف، أيّا كان $(i, j) \in \mathbb{I}_n \times \mathbb{I}_p$ ، المصفوفة $E_{i,j} = (\lambda_{k,q}^{(i,j)})_{(k,q) \in \mathbb{I}_n \times \mathbb{I}_p}$ من الفضاء

$M_{n,p}(\mathbb{K})$ بالعلاقة $\lambda_{k,q}^{(i,j)} = \delta_{ik} \delta_{jq}$ حيث $\delta_{\alpha\beta}$ هو رمز كرونكر الذي يُحقّق

و $\delta_{\alpha\beta} = 0$ إذا كان $\alpha \neq \beta$.

$$E_{i,j} : \begin{matrix} & j \\ & \downarrow \\ \begin{matrix} 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \end{matrix} \\ i \rightarrow \end{matrix}$$

نلاحظ بسهولة أنَّ الجملة $\mathcal{E} = (E_{i,j})_{(i,j) \in \mathbb{I}_n \times \mathbb{I}_p}$ أساس للفضاء $M_{n,p}(\mathbb{K})$ ، نسمّيه الأساس

القانوني لـ $M_{n,p}(\mathbb{K})$. ومن ثَمَّ يكون $\dim_{\mathbb{K}} M_{n,p}(\mathbb{K}) = np$ لأنَّ np هو عدد عناصر

المجموعة $\mathbb{I}_n \times \mathbb{I}_p$.

□

3.2.IV. مبرهنة: تكون مجموعة المصفوفات المتلّية العليا $\mathcal{T}_n^U(\mathbb{K})$ ، وكذلك مجموعة المصفوفات المتلّية السفلى $\mathcal{T}_n^L(\mathbb{K})$ ، جبرين جزئيين من $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. أي إنّ كلّاً منهما مغلق بالنسبة إلى العمليات الثلاث ويحتوي على المصفوفة الواحدة I_n .

الإثبات

يكفي أن نتحقق أنّ جداء ضرب مصفوفتين من $\mathcal{T}_n^U(\mathbb{K})$ ينتمي إلى $\mathcal{T}_n^U(\mathbb{K})$ ، لأن التوثق من كون $\mathcal{T}_n^U(\mathbb{K})$ فضاء شعاعي جزئي من $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ سهل جداً ومتروك للقارئ. لكن $M \ni \mathcal{T}_n^U(\mathbb{K})$ و $N \ni \mathcal{T}_n^U(\mathbb{K})$. ولنفترض أنّ $(a_{ij}) = M$ و $(b_{ij}) = N$. عندئذ يكون

$$\forall (i, j) \in \mathbb{N}_n^2, \quad i > j \Rightarrow [M \times N]_{ij} = \sum_{k=1}^{i-1} \underbrace{a_{ik}}_{0,j} b_{kj} + \sum_{k=i}^n a_{ik} \underbrace{b_{kj}}_{0,j} = 0$$

□ ونترك للقارئ أن يدرس بأسلوب مماثل حالة $\mathcal{T}_n^L(\mathbb{K})$.

4.2.IV. مبرهنة: تكون مجموعة المصفوفات القطرية $\mathcal{D}_n(\mathbb{K})$ ، جبراً جزئياً تبديلياً من $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

الإثبات

□ الإثبات تحقق مباشر ومتروك للقارئ.

3.IV. مصفوفة تطبيق خطي

3.1.IV. تعريف: ليكن E و F فضاءين شعاعيين منتهي البعد على حقل تبديلي \mathbb{K} . وليكن

$\mathcal{E} = (e_1, e_2, \dots, e_p)$ أساساً للفضاء E و $\mathcal{F} = (f_1, f_2, \dots, f_n)$ أساساً للفضاء F .

وأخيراً ليكن u تطبيقاً خطياً من E إلى F . يُكتب الشعاع $u(e_j)$ بطريقة وحيدة

كعبارة خطية بعناصر الأساس \mathcal{F} :

$$u(e_j) = \sum_{i=1}^n a_{ij} \cdot f_i$$

وذلك أيّا كانت $j \in \mathbb{N}_p$. نسمّي المصفوفة $(a_{ij})_{(i,j) \in \mathbb{N}_n \times \mathbb{N}_p}$ من $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$

مصفوفة التطبيق الخطي u في الأساسين \mathcal{E} و \mathcal{F} ، ونرمز إليها بالرمز $\text{mat}(u, \mathcal{E}, \mathcal{F})$ ،

كما يبيّن الشكل التوضيحي التالي:

$$\begin{array}{c}
 u(e_1) \quad \dots \quad u(e_j) \quad \dots \quad u(e_p) \\
 f_1 \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1p} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ f_i \begin{bmatrix} \vdots & & a_{ij} & & \vdots \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ f_n \begin{bmatrix} a_{n1} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{np} \end{bmatrix}
 \end{array} = \text{mat}(u, \mathcal{E}, \mathcal{F})$$

وأخيراً لنلاحظ أنه إذا كان $\mathcal{F}^* = (f_1^*, f_2^*, \dots, f_n^*)$ الأساس الثنائي للأساس \mathcal{F} ، كان

$$\forall (i, j) \in \mathbb{N}_n \times \mathbb{N}_p, \quad a_{ij} = \langle f_i^*, u(e_j) \rangle.$$

نتج المبرهنة التالية من التعريف والملاحظة السابقة مباشرة.

2-3.IV. مبرهنة: ليكن E و F فضاءين شعاعيين منتهيي البعد على حقل تبديلي \mathbb{K} . وليكن $\mathcal{E} = (e_1, e_2, \dots, e_p)$ أساساً للفضاء E و $\mathcal{F} = (f_1, f_2, \dots, f_n)$ أساساً للفضاء F . عندئذ يكون التطبيق

$$\Phi : \mathcal{L}(E, F) \rightarrow M_{n \times p}(\mathbb{K}), \quad u \mapsto \text{mat}(u, \mathcal{E}, \mathcal{F})$$

تقابلاً خطياً.

3-3.IV. مبرهنة: ليكن E و F فضاءين شعاعيين منتهيي البعد على حقل تبديلي \mathbb{K} . وليكن $\dim F = n$ و $\dim E = p$. وليكن u تطبيقاً خطياً من E إلى F ، رتبته $\text{rg } u = r$. عندئذ يوجد $\mathcal{E} = (e_1, e_2, \dots, e_p)$ أساس للفضاء E و يوجد $\mathcal{F} = (f_1, f_2, \dots, f_n)$ أساس للفضاء F ، بحيث :

$$\text{mat}(u, \mathcal{E}, \mathcal{F}) = n \left[\begin{array}{c|c} \begin{array}{ccc} \xrightarrow{r} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & 1 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix} & \begin{array}{c} \uparrow r \\ \mathbf{0}_{r \times p-r} \end{array} \\ \hline \begin{array}{c} \mathbf{0}_{n-r \times r} \end{array} & \begin{array}{c} \mathbf{0}_{n-r \times p-r} \end{array} \end{array} \right] = J_{n,p,r}$$

\xleftarrow{p}

الإثبات

لما كان $\text{rg } u = r$ كان بُعد $\ker u$ مساوياً $p - r$. ليكن إذن (e_{r-1}, \dots, e_p) أساساً لـ $\ker u$ ، ولتضمه إلى أساس $\mathcal{E} = (e_1, \dots, e_p)$ للفضاء E . ثم نعرف الفضاء الجزئي $G = \text{vect}((e_1, \dots, e_r))$ ، فيكون $E = G \oplus \ker u$.

إن مقصور u على G ، أي $u|_G$ ، تطبيق خطي متباين لأن

$$\ker u|_G = \ker u \cap G = \{0\}$$

ومن ثم إذا عرفنا $f_i = u(e_i)$ حين يكون $i \in \mathbb{N}_r$ ، كانت الجملة (f_1, \dots, f_r) جملة حرة في F ، لتضمها إذن إلى أساس $\mathcal{F} = (f_1, \dots, f_n)$ للفضاء F . ونتحقق بسهولة أن لمصفوفة

u في الأساسين \mathcal{E} و \mathcal{F} الشكل الموصوف في نص المبرهنة أي $\text{mat}(u, \mathcal{E}, \mathcal{F}) = J_{n,p,r}$.

4-3. IV. مبرهنة: لتكن E و F و G ثلاثة فضاءات شعاعية منتهية البعد على حقل تبديلي \mathbb{K} .

وليكن $\dim E = p$ و $\dim F = n$ و $\dim G = m$. وليكن $\mathcal{L}(E, F)$ وكذلك

ليكن $v \in \mathcal{L}(F, G)$ عندها، أي كانت الأسس $\mathcal{E} = (e_1, e_2, \dots, e_p)$ للفضاء E ،

و $\mathcal{F} = (f_1, f_2, \dots, f_n)$ للفضاء F ، وأخيراً $\mathcal{G} = (g_1, g_2, \dots, g_m)$ للفضاء G ،

كان

$$\text{mat}(v \circ u, \mathcal{E}, \mathcal{G}) = \text{mat}(v, \mathcal{F}, \mathcal{G}) \times \text{mat}(u, \mathcal{E}, \mathcal{F})$$

الإثبات

نضع $\text{mat}(u, \mathcal{E}, \mathcal{F}) = (a_{ij})$ و $\text{mat}(v, \mathcal{F}, \mathcal{G}) = (b_{kl})$. فيكون

$$u(e_j) = \sum_{i=1}^n a_{ij} f_i \quad , \quad j \in \mathbb{N}_p$$

$$v(f_i) = \sum_{k=1}^m b_{ki} g_k \quad , \quad i \in \mathbb{N}_n$$

ينتج من ذلك أنه، أيما كان $j \in \mathbb{N}_p$ ، فإن

$$v \circ u(e_j) = \sum_{i=1}^n a_{ij} v(f_i) = \sum_{i=1}^n a_{ij} \left(\sum_{k=1}^m b_{ki} g_k \right) = \sum_{k=1}^m \left(\sum_{i=1}^n b_{ki} a_{ij} \right) g_k = \sum_{k=1}^m c_{kj} g_k$$

حيث $c_{kj} = \sum_{i=1}^n b_{ki} a_{ij}$. إذن $\text{mat}(v \circ u, \mathcal{E}, \mathcal{G}) = (c_{ij})$ ، والمساواة السابقة تكافئ

□ . المساواة المطلوبة: $\text{mat}(v \circ u, \mathcal{E}, \mathcal{G}) = \text{mat}(v, \mathcal{F}, \mathcal{G}) \times \text{mat}(u, \mathcal{E}, \mathcal{F})$

IV.3-5. ملاحظة: ليكن E و F فضاءين شعاعيين منتهيين البعد على حقل تبديلي \mathbb{K} . وليكن $u \in \mathcal{L}(E, F)$ ، و $\mathcal{E} = (e_1, e_2, \dots, e_p)$ أساساً للفضاء E ، و $\mathcal{F} = (f_1, f_2, \dots, f_n)$ أساساً للفضاء F . ولنضع أخيراً $M = \text{mat}(u, \mathcal{E}, \mathcal{F}) = (a_{ij})$. لئلا كان \mathcal{E} أساساً لـ E كان التطبيق

$$\Phi_{\mathcal{E}} : M_{p \times 1}(\mathbb{K}) \rightarrow E, X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{bmatrix} \mapsto \Phi_{\mathcal{E}}(X) = \sum_{j=1}^p x_j e_j$$

تقابلاً خطياً. وكذلك يكون التطبيق

$$\Phi_{\mathcal{F}} : M_{n \times 1}(\mathbb{K}) \rightarrow F, Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} \mapsto \Phi_{\mathcal{F}}(Y) = \sum_{i=1}^n y_i f_i$$

لأن \mathcal{F} أساس لـ F .

ليكن x عنصراً من E ، وليكن $y = u(x)$. يُعطى شعاع مركبات x على الأساس \mathcal{E} بالعلاقة $X = \Phi_{\mathcal{E}}^{-1}(x)$ ، وكذلك فإن شعاع مركبات y على الأساس \mathcal{F} يعطى بالعلاقة $Y = \Phi_{\mathcal{F}}^{-1}(y)$. ويتحقق القارئ بسهولة أن الشعاعين X و Y يرتبطان بالعلاقة $Y = M \times X$.

فإذا عرفنا التطبيق الخطي

$$U_M : M_{p \times 1}(\mathbb{K}) \rightarrow M_{n \times 1}(\mathbb{K}), X \mapsto U_M(X) = M \times X$$

صار لدينا $U_M = \Phi_{\mathcal{F}}^{-1} \circ u \circ \Phi_{\mathcal{E}}$.

ويمكن تلخيص ذلك بالقول إن المخطط التالي تبديلي:

$$\begin{array}{ccc} M_{p \times 1}(\mathbb{K}) & \xrightarrow{U_M} & M_{n \times 1}(\mathbb{K}) \\ \Phi_{\mathcal{E}} \downarrow & & \downarrow \Phi_{\mathcal{F}} \\ E & \xrightarrow{u} & F \end{array}$$

6-3.IV. تعريف: لتكن المصفوفة $M = (a_{ij})$ من $M_{n \times p}(\mathbb{IK})$. نسمي منقول M المصفوفة ${}^tM = (b_{ij})$ من $M_{p \times n}(\mathbb{IK})$ المعرفة كما يلي :

$$\forall (i, j) \in \mathbb{N}_p \times \mathbb{N}_n, \quad b_{ij} = a_{ji}.$$

نقول إن المصفوفة المربعة M من $M_n(\mathbb{IK})$ متناظرة إذا وفقط إذا كان $M = {}^tM$. ونقول إننا متخالفية إذا وفقط إذا كانت تحقق $M = -{}^tM$. ولقد جرت العادة أن نرمز بالرمز $S_n(\mathbb{IK})$ إلى مجموعة المصفوفات المربعة المتناظرة من المرتبة n ، وبالرمز $\mathcal{A}_n(\mathbb{IK})$ إلى مجموعة المصفوفات المربعة المتخالفية من المرتبة n .

تلخص المبرهنة التالية بعض الخواص البسيطة.

7-3.IV. مبرهنة:

1. إن التطبيق $\Theta : M_{n \times p}(\mathbb{IK}) \rightarrow M_{p \times n}(\mathbb{IK}), M \mapsto {}^tM$ تقابل خطي.
2. أيًا كانت $M_{p \times m}(\mathbb{IK}) \ni B$ و $M_{n \times p}(\mathbb{IK}) \ni A$ كان $(A \times B) = {}^tB \times {}^tA$.
3. أيًا كانت المصفوفة المربعة A من $M_n(\mathbb{IK})$ ، كانت A قلوبية وكان $({}^tA)^{-1} = ({}^tA^{-1})$.
4. إن كلاً من $S_n(\mathbb{IK})$ و $\mathcal{A}_n(\mathbb{IK})$ فضاء شعاعي جزئي من $M_n(\mathbb{IK})$ ، وإذا كان العدد المميز للحقل \mathbb{IK} لا يساوي 2، كان

$$\dim \mathcal{A}_n(\mathbb{IK}) = \frac{n(n-1)}{2} \quad \text{و} \quad \dim S_n(\mathbb{IK}) = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$M_n(\mathbb{IK}) = S_n(\mathbb{IK}) \oplus \mathcal{A}_n(\mathbb{IK}) \quad \text{و}$$

الإثبات

1. إن إثبات الخاصية 1. مباشر وبسيط نتركه للقارئ.
 2. لنفرض أن $A = (a_{ij})$ وأن $B = (b_{ij})$. عندئذ يكون
- $$[{}^t(A \times B)]_{ij} = [A \times B]_{ji} = \sum_{k=1}^p a_{jk} b_{ki} = \sum_{k=1}^p [{}^tB]_{ik} [{}^tA]_{kj} = [{}^tB \times {}^tA]_{ij}$$
- وذلك أيًا كان $(i, j) \in \mathbb{N}_m \times \mathbb{N}_n$. وهذا ما يثبت الخاصية 2.
3. لتكن A مصفوفة قلوبية من $M_n(\mathbb{IK})$ ، عندئذ نجد $A^{-1} = B$ بحيث

$$A \times B = B \times A = I_n$$

وبالاستفادة من 2. نجد $B \times {}^tA = {}^tA \times {}^tB = {}^tI_n = I_n$ ، ومن ثم تكون tA قلوبية،

ويكون $({}^tA^{-1}) = ({}^tA)^{-1}$.

4. واضح من التعريف أن كلًا من $S_n(\mathbb{IK})$ و $\mathcal{A}_n(\mathbb{IK})$ فضاء شعاعي جزئي من $M_n(\mathbb{IK})$.

وإذا كان $(E_{ij})_{(i,j) \in \mathbb{IN}_n^2}$ الأساس القانوني للفضاء $M_n(\mathbb{IK})$ ، تكونت الجملة $(S_{ij})_{(i,j) \in T_n}$

حيث $T_n = \{(i, j) \in \mathbb{IN}_n^2 : i \leq j\}$ وحيث

$$\forall (i, j) \in T_n, \quad S_{i,j} = \begin{cases} E_{ii} & : i = j \\ E_{ij} + E_{ji} & : i \neq j \end{cases}$$

أساساً للفضاء الجزئي $S_n(\mathbb{IK})$. إذن

$$\dim S_n(\mathbb{IK}) = \text{card } T_n = \frac{n(n+1)}{2}$$

نلاحظ، انطلاقاً من التعريف، أنه إذا كان العدد المميز للحقل \mathbb{IK} يساوي 2 كان

$S_n(\mathbb{IK}) = \mathcal{A}_n(\mathbb{IK})$. لذلك سنفترض فيما يأتي أن العدد المميز للحقل \mathbb{IK} لا يساوي 2.

تكون الجملة $(E_{ij} - E_{ji})_{1 \leq i < j \leq n}$ أساساً للفضاء الجزئي $\mathcal{A}_n(\mathbb{IK})$ ، ومن ثم

$$\dim \mathcal{A}_n(\mathbb{IK}) = \text{card } \{(i, j) \in \mathbb{IN}_n^2 : i < j\} = \frac{n(n-1)}{2}$$

وأخيراً، أيًا كان $M \in S_n(\mathbb{IK}) \cap \mathcal{A}_n(\mathbb{IK})$ كان $-M = {}^tM = M$ ، ومن ثم $M = 0$

لأن العدد المميز للحقل \mathbb{IK} لا يساوي 2. إذن من جهة أولى، $S_n(\mathbb{IK}) \cap \mathcal{A}_n(\mathbb{IK}) = \{0\}$.

ومن جهة ثانية لدينا

$$\forall M \in M_n(\mathbb{IK}), \quad M = \underbrace{\frac{1}{2}(M + {}^tM)}_{\in S_n(\mathbb{IK})} + \underbrace{\frac{1}{2}(M - {}^tM)}_{\in \mathcal{A}_n(\mathbb{IK})}$$

□

وهذا ما يثبت أن $M_n(\mathbb{IK}) = S_n(\mathbb{IK}) \oplus \mathcal{A}_n(\mathbb{IK})$.

IV. 8.3. مرهنة: ليكن E و F فضاءين شعاعيين منتهيين البعد على حقل تبديلي \mathbb{IK} . وليكن

$\mathcal{L}(E, F) \ni u$ ليكن $\mathcal{E} = (e_1, \dots, e_p)$ أساساً لـ E ، و $\mathcal{F} = (f_1, \dots, f_n)$ أساساً

لـ F . ولنضع $\mathcal{E}^* = (e_1^*, \dots, e_p^*)$ الأساس الثنائي لـ \mathcal{E} ، و $\mathcal{F}^* = (f_1^*, \dots, f_n^*)$

الأساس الثنائي لـ \mathcal{F} . عندئذ يكون

$${}^t(\text{mat}(u, \mathcal{E}, \mathcal{F})) = \text{mat}({}^t u, \mathcal{F}^*, \mathcal{E}^*)$$

الإثبات

لنضع $\text{mat}(u, \mathcal{E}, \mathcal{F}) = (a_{ij})$ و $\text{mat}({}^t u, \mathcal{F}^*, \mathcal{E}^*) = (b_{ij})$. عندئذ يكون

□

$$b_{ij} = \langle {}^t u(f_j^*), e_i \rangle_{\mathcal{E}^*, \mathcal{E}} = \langle f_j^*, u(e_i) \rangle_{F^*, F} = a_{ji}$$

4.IV. رتبة مصفوفة

4.IV.1. تعريف: لتكن المصفوفة $M = (a_{ij})$ من $M_{n \times p}(\mathbb{K})$. نسمي أعمدة M الجملة $M_{n \times 1}(\mathbb{K})$ من عناصر الفضاء المعرفة كما يلي

$$\forall j \in \mathbb{N}_p, \quad C_j(M) = \begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{bmatrix}$$

وكذلك نسمي أسطر M جملة العناصر $(R_1(M), R_2(M), \dots, R_n(M))$ من الفضاء $M_{1 \times p}(\mathbb{K})$ المعرفة كما يلي

$$\forall i \in \mathbb{N}_n, \quad R_i(M) = [a_{i1} \ a_{i2} \ \dots \ a_{ip}]$$

4.IV.2. تعريف: لتكن المصفوفة M من $M_{n \times p}(\mathbb{K})$. نسمي رتبة المصفوفة M رتبة أعمدها في الفضاء $M_{n \times 1}(\mathbb{K})$. ونرمز إلى هذه الرتبة بالرمز $\text{rg } M$. أي

$$\text{rg } M = \dim \text{vect}\{C_1(M), \dots, C_p(M)\}$$

4.IV.3. مبرهنة: ليكن E و F فضاءين شعاعيين منتهيين الجعد على حقل تبديلي \mathbb{K} . وليكن $\mathcal{E} = (e_1, e_2, \dots, e_p)$ أساساً للفضاء E ، و $\mathcal{F} = (f_1, f_2, \dots, f_n)$ أساساً للفضاء F . عندئذ أيّا كان $u \in \mathcal{L}(E, F)$ ، لدينا $\text{rg } M = \text{rg } u$ حيث $M = \text{mat}(u, \mathcal{E}, \mathcal{F})$.

الإثبات

من جهة أولى، لدينا $\text{rg } u = \dim \text{Im } u = \text{rg}((u(e_1), \dots, u(e_p)))$ ومن جهة ثانية، لما كان \mathcal{F} أساساً لـ F ، كان التطبيق

$$\Phi_{\mathcal{F}} : M_{n \times 1}(\mathbb{K}) \rightarrow F, \quad Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} \mapsto \Phi_{\mathcal{F}}(Y) = \sum_{i=1}^n y_i f_i$$

تقابلاً خطياً، وهو يُحقق $\Phi_{\mathcal{F}}(C_j(M)) = u(e_j)$ إذن

$$\begin{aligned} \text{rg } u &= \text{rg}(\{\Phi_{\mathcal{F}}(C_1(M)), \dots, \Phi_{\mathcal{F}}(C_p(M))\}) \\ &= \text{rg}(C_1(M), \dots, C_p(M)) = \text{rg } M \end{aligned}$$

□

وهذا يثبت المطلوب.

4-4.IV. ملاحظة: لتكن $M \ni \mathcal{M}_{n \times p}(\mathbb{K})$. وليكن التطبيق الخطي

$$U_M : \mathcal{M}_{p \times 1}(\mathbb{K}) \rightarrow \mathcal{M}_{n \times 1}(\mathbb{K}), \quad \iota \mapsto X \mapsto M \times X$$

عندئذ يكون $\text{rg } M = \text{rg } U_M$ لأن أعمدة المصفوفة M هي صورة الأساس القانوني في الفضاء $\mathcal{M}_{p \times 1}(\mathbb{K})$ وفق التطبيق الخطي U_M .

نسمح لنا هذه الملاحظة باستنتاج المبرهنة التالية من المبرهنة 4-3.II.

5-4.IV. مبرهنة: لتكن $M \ni \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. إن الخواص التالية متكافئة:

1. المصفوفة M قَلْبُوبَة.

$$2. \text{rg } M = n$$

3. يوجد $M_n(\mathbb{K}) \ni R$ بحيث $M \times R = I_n$.

4. يوجد $M_n(\mathbb{K}) \ni L$ بحيث $L \times M = I_n$.

5-4.IV. مبرهنة: لتكن $M \ni \mathcal{M}_{n \times p}(\mathbb{K})$. عندئذ يكون $\text{rg } M = \text{rg } {}^t M$.

الإثبات

لتعرّف \mathcal{E}_r بأنه الأساس القانوني في $\mathcal{M}_{r \times 1}(\mathbb{K})$. ولنرمز بالرمز \mathcal{E}_r^* إلى أساسه التوحي. ولتأمل التطبيق الخطي

$$U_M : \mathcal{M}_{p \times 1}(\mathbb{K}) \rightarrow \mathcal{M}_{n \times 1}(\mathbb{K}), \quad \iota \mapsto X \mapsto M \times X$$

عندئذ يكون لدينا استناداً إلى المبرهنة 8-3.IV.

$${}^t M = \text{mat}({}^t U_M, \mathcal{E}_n^*, \mathcal{E}_p^*) \quad \text{و} \quad M = \text{mat}(U_M, \mathcal{E}_p, \mathcal{E}_n)$$

وبالاستفادة من المبرهنة 5-3.III. يكون $\text{rg } U_M = \text{rg } {}^t U_M$ ، ومن ثمّ $\text{rg } M = \text{rg } {}^t M$. □

6-4.IV. نتيجة: لتكن $M \ni \mathcal{M}_{n \times p}(\mathbb{K})$. إن رتبة M هي رتبة أسطرها في الفضاء $\mathcal{M}_{1 \times p}(\mathbb{K})$.

ومن ثمّ يكون $\text{rg } M \leq \min(n, p)$

وإذا استفدنا من المبرهنة 5-3.II. حصلنا على النتيجة التالية:

7-4.IV. نتيجة: لتكن $M \ni \mathcal{M}_{n \times p}(\mathbb{K})$ و $N \ni \mathcal{M}_{p \times m}(\mathbb{K})$. عندئذ

$$\text{rg } A \times B \leq \min(\text{rg } A, \text{rg } B)$$

وإذا كانت A قَلْبُوبَة كان $\text{rg } (A \times B) = \text{rg } B$. وإذا كانت B قَلْبُوبَة كان $\text{rg } (A \times B) = \text{rg } A$.

5.IV. تغيير الأساس

5.IV.1. مبرهنة: ليكن E فضاء شعاعياً منتهي البعد على حقل \mathbb{K} . وليكن $\mathcal{E} = (e_1, \dots, e_n)$ أساساً للفضاء E . وأخيراً لتكن $P = (p_{ij})$ مصفوفة من $M_n(\mathbb{K})$. حتى تكون جملة الأشعة $\mathcal{A} = (a_1, \dots, a_n)$ ، حيث $a_j = \sum_{i=1}^n p_{ij} \cdot e_i$ ، أساساً للفضاء E يلزم ويكفي أن تكون المصفوفة P قلوية.

الإثبات

ليكن u التطبيق الخطي من $L(E)$ المعرّف بالشرط $u(e_j) = a_j$ ، $\forall j \in \mathbb{N}_n$. عندئذ يكون $P = \text{mat}(u, \mathcal{E}, \mathcal{E})$. ومن ثم تكون لدينا التكافؤات التالية:

$$(\mathcal{A} \text{ أساس لـ } E) \Leftrightarrow (\mathcal{A} \text{ تولّد } E) \Leftrightarrow (n = \text{rg } u) \Leftrightarrow (n = \text{rg } P) \Leftrightarrow (P \text{ قلوية}).$$

وهذا يثبت المطلوب. \square

5.IV.2. تعريف: ليكن E فضاء شعاعياً منتهي البعد على حقل \mathbb{K} . وليكن $\mathcal{E} = (e_1, \dots, e_n)$ أساساً للفضاء E ، وليكن $\mathcal{E}' = (e'_1, \dots, e'_n)$ أساساً آخر للفضاء E . نسمي مصفوفة الانتقال من \mathcal{E} إلى \mathcal{E}' ، مصفوفة التطبيق المطابق I_E ، من الفضاء E مزوداً بالأساس \mathcal{E}' إلى الفضاء نفسه مزوداً بالأساس \mathcal{E} ، أي $(E, \mathcal{E}') \xrightarrow{I_E} (E, \mathcal{E})$. ونرمز إلى هذه المصفوفة بالرمز $P_E^{\mathcal{E}'}$ ، فيكون $P_E^{\mathcal{E}'} = \text{mat}(I_E, \mathcal{E}', \mathcal{E})$.

5.IV.3. مبرهنة: ليكن E فضاء شعاعياً منتهي البعد على حقل \mathbb{K} . وليكن $\mathcal{E} = (e_1, \dots, e_n)$ أساساً للفضاء E ، وليكن $\mathcal{E}' = (e'_1, \dots, e'_n)$ أساساً آخر للفضاء E . عندئذ أي $x \in E$ لدينا

$$X = P_E^{\mathcal{E}'} \times X'$$

حيث $X = [x_1, \dots, x_n]$ هو شعاع مركّبات x على الأساس \mathcal{E} ، أي $x = \sum_{i=1}^n x_i \cdot e_i$ ، و $X' = [x'_1, \dots, x'_n]$ هو شعاع مركّبات x على الأساس \mathcal{E}' ، أي $x = \sum_{i=1}^n x'_i \cdot e'_i$.

الإثبات

لتكن $P_E^{\mathcal{E}} = \{p_{i,j}\}$ ، عندئذ يكون $e'_j = \sum_{i=1}^n p_{i,j} \cdot e_i$ ، $\forall j \in \mathbb{N}_n$.

ومن ثمّ

$$x = \sum_{j=1}^n \xi'_j \cdot e'_j = \sum_{j=1}^n \xi'_j \cdot \left(\sum_{i=1}^n p_{i,j} \cdot e_i \right) = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n p_{i,j} \xi'_j \right) \cdot e_i$$

ولأنه لدينا أيضاً $x = \sum_{i=1}^n \xi_i \cdot e_i$ ، ينتج أنّ

$$\forall i \in \mathbb{N}_n, \xi_i = \sum_{j=1}^n p_{i,j} \cdot \xi'_j$$

□

وهذا يُكافئ المساواة المطلوبة: $X = P_E^{\mathcal{E}} \times X'$

4-5.IV. ملاحظة: لما كان \mathcal{E} و \mathcal{E}' أساسين لـ E كان التطبيقان الخطيان التاليان متقابلين:

$$\Phi_{\mathcal{E}} : \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{K}) \rightarrow E, [\xi_1, \dots, \xi_n] \mapsto \sum_{j=1}^n \xi_j \cdot e_j$$

$$\Phi_{\mathcal{E}'} : \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{K}) \rightarrow E, [\zeta_1, \dots, \zeta_n] \mapsto \sum_{j=1}^n \zeta_j \cdot e'_j$$

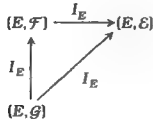
ويمكننا التعبير عن المبرهنة السابقة بكتابة: $(\forall x \in E, \Phi_{\mathcal{E}}^{-1}(x) = P_E^{\mathcal{E}} \times \Phi_{\mathcal{E}'}^{-1}(x))$

5-5.IV. مبرهنة: ليكن E فضاء شعاعياً منتهي البعد على حقل \mathbb{K} . ولتكن \mathcal{E} و \mathcal{F} و \mathcal{G} ثلاثة

أساسات للفضاء E . عندئذ يكون $P_E^{\mathcal{G}} = P_E^{\mathcal{F}} \times P_{\mathcal{F}}^{\mathcal{G}}$

الإثبات

إذا تأقنا المخطط التبديلي التالي



أمكننا أن نكتب $\text{mat}(I_E, \mathcal{G}, \mathcal{E}) = \text{mat}(I_E, \mathcal{F}, \mathcal{E}) \times \text{mat}(I_E, \mathcal{G}, \mathcal{F})$

□

وهذه هي المساواة المطلوبة.

6-5.IV. مبرهنة: ليكن E و F فضاءين شعاعيين منتهيي البعد على حقل IK . وليكن \mathcal{E} و \mathcal{E}' أساسين للفضاء E ، و \mathcal{F} و \mathcal{F}' أساسين للفضاء F . وأخيراً ليكن $u \in \mathcal{L}(E, F)$. عندئذ يكون

$$\text{mat}(u, \mathcal{E}, \mathcal{F}) = P_{\mathcal{F}'}^{-1} \times \text{mat}(u, \mathcal{E}', \mathcal{F}') \times (P_{\mathcal{E}}^{-1})^{-1}$$

الإثبات

كما في المبرهنة السابقة، يكفي أن ننظر في المخطط التبديلي التالي

$$\begin{array}{ccc} (E, \mathcal{E}) & \xrightarrow{u} & (F, \mathcal{F}) \\ I_E^{-1} \downarrow & & \uparrow I_F \\ (E, \mathcal{E}') & \xrightarrow{u} & (F, \mathcal{F}') \end{array}$$

□

فتجد المطلوب.

7-5.IV. مبرهنة وتعريف: نقول عن مصفوفتين A و B من $M_{n \times p}(IK)$ إنهما متكافئتان إذا وفقط إذا وُجِدَت مصفوفتان قلوبتان $P \in \mathcal{GL}_p(K)$ و $Q \in \mathcal{GL}_n(K)$ بحيث يكون $B = QAP$ ، ونكتب في هذه الحالة $B \approx A$. وتكون العلاقة الثنائية:

$$\forall (A, B) \in (M_{n \times p}(IK))^2,$$

$$A \approx B \Leftrightarrow \exists P \in \mathcal{GL}_p(K), \exists Q \in \mathcal{GL}_n(K), B = QAP$$

علاقة تكافؤ على المجموعة $M_{n \times p}(IK)$.

8-5.IV. مبرهنة: لتكن A و B مصفوفتين من $M_{n \times p}(IK)$ ، عندئذ يكون

$$A \approx B \Leftrightarrow \text{rg } A = \text{rg } B$$

الإثبات

إن الاقتضاء (\Rightarrow) واضح استناداً إلى النتيجة 7-4.IV.

وبالعكس، لتكن A مصفوفة من $M_{n \times p}(IK)$ نُحَقِّق $\text{rg } A = r$. وليكن التطبيق

الخطي القانوني الموالي لـ A :

$$U_A : M_{p \times 1}(IK) \rightarrow M_{n \times 1}(IK), X \mapsto AX$$

فإذا كان \mathcal{E}_p و \mathcal{E}_n الأساسين القانونيين في $M_{p \times 1}(\mathbb{K})$ و $M_{n \times 1}(\mathbb{K})$ على التوالي، كان

$$A = \text{mat}(U_A, \mathcal{E}_p, \mathcal{E}_n)$$

ولكن بمقتضى المبرهنة 3-3.IV. يوجد أساسان \mathcal{E}'_p و \mathcal{E}'_n في $M_{p \times 1}(\mathbb{K})$ و $M_{n \times 1}(\mathbb{K})$ على التوالي، بحيث يكون

$$J_{n,p,r} = \text{mat}(U_A, \mathcal{E}'_p, \mathcal{E}'_n)$$

ومن ثَمَّ، بالاستفادة من المبرهنة 6-5.IV. يكون

$$A = P_{\mathcal{E}_n}^{\mathcal{E}'_n} J_{n,p,r} (P_{\mathcal{E}_p}^{\mathcal{E}'_p})^{-1}$$

وهذا ما يُثبت أن $A \approx J_{n,p,r}$.

فإذا كان $\text{rg } A = r = \text{rg } B \approx J_{n,p,r}$ كان $B \approx J_{n,p,r}$. وهذا يُبرهن صحة الاقتضاء

□

الثاني أي (\Leftarrow).

9-5.IV. مبرهنة وتعريف: نقول عن مصفوفتين مربعيتين A و B من $M_n(\mathbb{K})$ إنهما متشابهتان إذا وفقط إذا وُجدت مصفوفة قَلْوِيَّة $P \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ بحيث يكون $B = P A P^{-1}$ ، ونكتب في هذه الحالة $B \equiv A$. وتكون العلاقة التالية:

$$\forall (A, B) \in (M_n(\mathbb{K}))^2, \quad A \equiv B \Leftrightarrow \exists P \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K}), B = P A P^{-1}$$

علاقة تكافؤ على المجموعة $M_n(\mathbb{K})$.

10-5.IV. مبرهنة: لتكن A و B مصفوفتين مربعيتين من $M_n(\mathbb{K})$. ولنفرض أنهما متشابهتان.

ثم نثبت تحقق الخواص التالية:

1. إن المصفوفتين A و B متشابهتان.
2. إن المصفوفتين A^m و B^m متشابهتان، وذلك أياً كانت $m \in \mathbb{N}^*$.
3. وإذا كانت A قَلْوِيَّة كانت B قَلْوِيَّة وكانت المصفوفتان A^{-1} و B^{-1} متشابهتين.

الإثبات

إن إثبات هذه المبرهنة بسيط انطلاقاً من التعريف ولتركه تمريناً للقارئ.

□

6.IV. أثر مصفوفة وأثر تطبيق خطّي

6.IV.1. تعريف: لتكن $A = (a_{ij})$ مصفوفة مربعة من $M_n(\mathbb{K})$. نسمّي العنصر $\sum_{i=1}^n a_{ii}$ من

\mathbb{K} أثر المصفوفة A ، ونرمز إليه بالرمز $\text{tr } A$.

تلتخص المبرهنة التالية خواص أثر مصفوفة.

6.IV.2. مبرهنة:

1. إنّ التطبيق $\text{tr} : M_n(\mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{K}, A \mapsto \text{tr } A$ شكل خطّي على $M_n(\mathbb{K})$.

2. أيّاً كانت A من $M_n(\mathbb{K})$ ، لدينا $\text{tr}(A) = \text{tr}({}^t A)$.

3. إنّ أثر المصفوفة الواحدية يساوي n ، أي $\text{tr } I_n = n$.

4. أيّاً كانت A و B من $M_n(\mathbb{K})$ ، لدينا $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$.

الإثبات

إنّ الخواصّ الثلاث الأولى واضحة من التعريف. لنثبت فقط الخاصّة الرابعة:

لنضع $A = (a_{ij})$ و $B = (b_{ij})$ فيكون

$$\forall j \in \mathbb{N}_n, [BA]_{jj} = \sum_{i=1}^n b_{ji} a_{ij} \quad \text{و} \quad \forall i \in \mathbb{N}_n, [AB]_{ii} = \sum_{j=1}^n a_{ij} b_{ji}$$

ومن ثمّ

$$\text{tr } AB = \sum_{i=1}^n [AB]_{ii} = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n a_{ij} b_{ji} \right) = \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^n a_{ij} b_{ji} \right) = \sum_{j=1}^n [BA]_{jj} = \text{tr } BA$$

□

وهذا يُثبت المطلوب.

تبيّن الخاصّة التالية أنّ أثر المصفوفة هو الشكل الخطّي الوحيد من $(M_n(\mathbb{K}))^*$ الذي يُحقّق

الشرطين 3. و 4. من المبرهنة السابقة.

6.IV.3. مبرهنة: لنفترض أنّ العدد المميّز لـ \mathbb{K} يساوي 0. وليكن $\Phi : M_n(\mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{K}$

شكلاً خطيّاً على $M_n(\mathbb{K})$ يحقّق الشرطين $\Phi(I_n) = n$ و

$$\forall (A, B) \in M_n(\mathbb{K}) \times M_n(\mathbb{K}), \quad \Phi(AB) = \Phi(BA)$$

عندئذ يكون $\Phi = \text{tr}$.

الإثبات

ليكن $(E_{ij})_{(i,j) \in \mathbb{N}_n^2}$ الأساس القانوني للفضاء $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. نترك للقارئ أن يتحقق صحة الخاصّة التالية:

$$\forall (i, j, k, \ell) \in \mathbb{N}_n^4, \quad E_{ij} E_{\ell k} = \delta_{\ell j} E_{ik}$$

حيث $\delta_{\alpha\beta}$ هو رمز كرونكر.

ومن ثمّ، أيّا كان الدليلان المختلفان i و j من \mathbb{N}_n ، كان

$$E_{ij} = E_{ii} E_{ij} - E_{ij} E_{ii}$$

لذا يكون $\forall (i, j) \in \mathbb{N}_n^2, \quad i \neq j \Rightarrow \Phi(E_{ij}) = 0$

ومن جهة أخرى، أيّا كان الدليل j من \mathbb{N}_n ، المختلف عن 1، كان

$$E_{jj} - E_{11} = E_{jj} E_{1j} - E_{1j} E_{jj}$$

إذن يكون $\forall j \in \mathbb{N}_n, \quad \Phi(E_{jj}) = \Phi(E_{11})$

فإذا عرفنا $\lambda = \Phi(E_{11})$ ووضعنا $\Phi - \lambda \cdot \text{tr}$ ، كان لدينا استناداً إلى ما سبق

$$\forall (i, j) \in \mathbb{N}_n^2, \quad \Psi(E_{ij}) = 0$$

نستنتج من ذلك أنّ $\Psi = 0$ أو أنّ $\Phi = \lambda \cdot \text{tr}$. ولما كان $\Phi(I_n) = n$ أمكننا أن نحسب λ

لنجد $\lambda = 1$. وهنا نستفيد من كون العدد المميز لـ \mathbb{K} يساوي 0. في الحقيقة يكفي ألاّ يقسم

العدد المميز للحقل \mathbb{K} العدد n . وبذلك يكتمل الإثبات. \square

4.6.IV. مبرهنة: لتكن A و B مصفوفتين مربعيتين من $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. ولنفترض أنهما متشابهتان.

عندئذ يكون $\text{tr } A = \text{tr } B$.

الإثبات

توجد بمقتضى الفرض مصفوفة قلوّبة $P \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ بحيث $A = P B P^{-1}$. لذا

$$\square \quad \text{tr } A = \text{tr}(P B P^{-1}) = \text{tr}(P^{-1} P B) = \text{tr}(I_n B) = \text{tr } B$$

5.6.IV. مبرهنة وتعريف: ليكن E فضاءً شعاعياً منتهي البعد على حقل \mathbb{K} . وليكن التطبيق

الخطّي $u \in \mathcal{L}(E)$. عندئذ لا يتعلّق المقدار $\text{tr}(\text{mat}(u, \mathcal{E}, \mathcal{E}))$ بالأساس المختار \mathcal{E}

للفضاء E . لذلك نسمّيه أثر التطبيق الخطّي u ونرمز إليه بالرمز $\text{tr } u$.

الإثبات

ليكن \mathcal{E}' أساساً آخر للفضاء E ، ولنضع $P = P_{\mathcal{E}'}^{\mathcal{E}}$. فيكون، بمقتضى المبرهنة 5-6.IV،

$$\text{mat}(u, \mathcal{E}, \mathcal{E}) = P \text{ mat}(u, \mathcal{E}', \mathcal{E}') P^{-1}$$

ينتج من ذلك أنّ $\text{mat}(u, \mathcal{E}, \mathcal{E}) \equiv \text{mat}(u, \mathcal{E}', \mathcal{E}')$ ، ومن ثم يكون

$$\text{tr}(\text{mat}(u, \mathcal{E}, \mathcal{E})) = \text{tr}(\text{mat}(u, \mathcal{E}', \mathcal{E}'))$$

□

وهو المطلوب إثباته.

نستنتج من التعريف السابق ومن خواص أثر المصفوفة النتيجة التالية:

6-6.IV. مبرهنة: ليكن E فضاءً شعاعياً منتهي البعد على حقل \mathbb{K} .

1. إنّ التطبيق $\text{tr}: \mathcal{L}(E) \rightarrow \mathbb{K}, u \mapsto \text{tr } u$ شكل خطّي على $\mathcal{L}(E)$.

2. أيّاً كان u من $\mathcal{L}(E)$ ، لدينا $\text{tr } u = \text{tr } {}^t u$.

3. إنّ أثر التطبيق المطابق يساوي $\dim E$ ، أي $\text{tr } I_E = \dim E$.

4. أيّاً كانت u و v من $\mathcal{L}(E)$ ، لدينا $\text{tr}(u \circ v) = \text{tr}(v \circ u)$.

5. إذا كان p إسقاطاً^d للفضاء E ، كان $\text{rg } p = \text{tr } p$.



^d أي $p \circ p = p$ رُغَق $\mathcal{L}(E) \ni p$.

تمارين

التمرين 1. لتكن $M = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ مصفوفة لوابتها في حلقة تبديلية A . أثبت أن

$$M^2 - (a+d)M + (ad-bc)I_2 = 0.$$

التمرين 2. ليكن α و β عددين حقيقيين مختلفين، ولتكن $M \in M_n(\mathbb{R})$ مصفوفة تحقق

$$M^2 - (\alpha + \beta)M + \alpha\beta I_n = 0, \quad M \neq \alpha I_n, \quad M \neq \beta I_n$$

1. أثبت أن بُعد الفضاء الشعاعي الجزئي $V(M) = \text{vect}((M, I_n))$ يساوي 2.

2. أثبت أنه لا توجد في $V(M)$ إلا مصفوفتان مختلفتان A و B تحققان الشروط

$$B \in \{0, I_n\}, \quad B^2 = B \quad \text{و} \quad A \in \{0, I_n\}, \quad A^2 = A$$

ثم أثبت أن $AB = BA = 0$ وأن (A, B) أساس لـ $V(M)$.

3. أثبت أن $V(M)$ جبر جزئي من $M_n(\mathbb{R})$ ، وأنه إذا كانت $C \in V(M)$ مصفوفة قلوبة

$$\text{فإن } V(M) \ni C^{-1}.$$

التمرين 3. لتكن A و B المصفوفتين من $M_3(\mathbb{R})$ المعرفتين كما يلي:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

ولتكن المجموعة $\mathcal{E} = \{xA + yB \in M_3(\mathbb{R}) \mid (x, y) \in \mathbb{R}^2\}$

1. احسب $(A+B)^n$ أيأ كانت $n \in \mathbb{N}$.

2. أثبت أن عناصر \mathcal{E} ليست قلوبة في $M_3(\mathbb{R})$.

3. أثبت أن البنية $(\mathcal{E}, +, \times)$ ، حيث $+$ و \times هما جمع و ضرب المصفوفات في $M_3(\mathbb{R})$ ، هي

حقل. عيّن حيادي الضرب ومقلوب عنصر غير معدوم فيه، ثم أثبت أن هذا الحقل

يشاكل تقابلياً حقل الأعداد العقدية \mathbb{C} .

التمرين 4. ليكن الفضاء الشعاعي $E = M_{p \times 1}(\mathbb{R})$ ، حيث $p \geq 2$ ، وليكن $u \in \mathcal{L}(E)$ التطبيق الخطي الذي يربط كل $X = [x_1, \dots, x_p]^T \in E$ بـ $Y = u(X) = [y_1, \dots, y_p]^T \in E$ حيث

$$\forall i \in \mathbb{N}_p, \quad y_i = \frac{1}{p-1} \sum_{j \in \mathbb{N}_p \setminus \{i\}} x_j$$

I. عيّن $A = \text{mat}(u, \mathcal{E}, \mathcal{E})$ حيث $\mathcal{E} = (e_1, \dots, e_p)$ هو الأساس القانوني في E .

II. نرمز بـ I إلى المصفوفة الواحدية في $M_p(\mathbb{R})$ وبـ J إلى المصفوفة في $M_p(\mathbb{R})$ التي تساوي جميع ثوابتها 1.

1. احسب J^n عندما $n \in \mathbb{N}$.

2. أثبت أنه أياً كانت $n \in \mathbb{N}$ توجد ثنائية (a_n, b_n) يطلب تعيينها بحيث

$$A^n = a_n A + b_n I$$

3. أثبت أن A قلوقة واحسب A^{-1} .

4. أثبت أنه يوجد $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$ بحيث $(A - \lambda_1 I)(A - \lambda_2 I) = 0$.

III. لتكن $C = \frac{p-1}{p} A + \frac{1}{p} I$. أثبت أن C مصفوفة إسقاط q في الأساس \mathcal{E} . عيّن

كلّ من $E_1 = \text{Im } q$ و $E_2 = \ker q$ ، ثم عيّن أساساً \mathcal{B} لـ E بحيث تكون المصفوفة

$$\tilde{A} = \text{mat}(u, \mathcal{B}, \mathcal{B})$$
 مصفوفة قطرية، وأوجد مصفوفة قلوقة Q بحيث $A = Q \tilde{A} Q^{-1}$.

التمرين 5. ليكن الفضاء الشعاعي $E = M_{n \times 1}(\mathbb{R})$ ، حيث $n \geq 2$ ، وليكن $S_n \ni \sigma$ تبديلاً

على المجموعة \mathbb{N}_n . ولننظر في التطبيق الخطي $p_\sigma \in \mathcal{L}(E)$ الذي يربط كل شعاع

$$X = [x_1, \dots, x_n]^T \text{ بالشعاع } [x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)}]^T = p_\sigma(X)$$

1. عبّر باستخدام رمز Kronecker عن المصفوفة $(a_{ij}^\sigma)_{i,j} = \text{mat}(p_\sigma, \mathcal{E}, \mathcal{E})$. حيث $P_\sigma = \text{mat}(p_\sigma, \mathcal{E}, \mathcal{E})$.

حيث $\mathcal{E} = (e_1, \dots, e_n)$ هو الأساس القانوني في E .

2. لتكن $M = (m_{ij})_{i,j} \in M_n(\mathbb{R})$ ، احسب $M P_\sigma$ و $P_\sigma M$ و $P_\sigma M P_\sigma^{-1}$.

3. استنتج أن المصفوفتين التاليتين متشابهتان:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & 4 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \\ 1 & 4 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

التمرين 6. ليكن $X = {}^t[x_1, \dots, x_n]$ و $Y = {}^t[y_1, \dots, y_n]$ شعاعين من $E = M_{n \times 1}(\mathbb{R})$ ،

$$M = aX \cdot {}^tX + bY \cdot {}^tY \text{ نضع } \sum_{k=1}^n x_k y_k = 0 \text{ و } \sum_{k=1}^n y_k^2 = 1 \text{ و } \sum_{k=1}^n x_k^2 = 1$$

حيث $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. أثبت أنه يوجد عدداً λ و μ بحيث

$$M^3 + \lambda M^2 + \mu M = 0$$

ادرس حالة المصفوفة $M = (m_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$ حيث $m_{ij} = \alpha$ إذا كان $i + j$ زوجياً و $m_{ij} = \beta$ إذا كان $i + j$ فردياً.

التمرين 7. أياً كان $a \in \mathbb{R}$ ، نعرف المصفوفة $M_a \in M_n(\mathbb{R})$ كما يلي

$$m_{ij} = \begin{cases} C_{j-1}^{i-1} \cdot \alpha^{j-i} & : j \geq i \\ 0 & : j < i \end{cases}$$

1. أثبت أن المجموعة $G = \{M_a \in M_n(\mathbb{R}) : a \in \mathbb{R}\}$ زمرة جزئية من $\mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$ تشاكل تقابلياً $(\mathbb{R}, +)$.

2. لتكن $(a_{ij}) = A$ و $(b_{ij}) = B$ من $M_n(\mathbb{R})$. ونفرض أن $a_{ij} = 0$ عندما $i \geq j$ ، وأن $b_{ij} = 0$ حين يكون $i \geq j - s$ حيث $s \in \{0, \dots, n-1\}$. وأخيراً لتكن المصفوفة $(c_{ij}) = AB = C$. أثبت أن $c_{ij} = 0$ عندما يكون $i \geq j - s - 1$. واستنتج أن $(M_a - I_n)^n = 0$.

3. أثبت أنه مهما يكن كثير الحدود P الذي لا تزيد درجته عن $n-1$ من $\mathbb{R}[X]$ ، فإن

$$P(X) = \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} C_n^k P(X + ka)$$

4. لتكن $\mathbb{IN} \ni (p, n)$ حيث $n \geq p > 0$. نرمز بالرمز S_p^n إلى عدد التطبيقات الغامرة من

\mathbb{IN}_p إلى \mathbb{IN}_n . أثبت أن $p^n = \sum_{k=1}^n C_p^k S_n^k$. مساعدة: يمكن حساب عدد التطبيقات

من \mathbb{IN}_n إلى \mathbb{IN}_p بطريقتين.

5. استنتج قيمة S_n^p . واحسب بوجه خاص S_{n+1}^n و S_{n+2}^n .



الفصل الخامس

المحددات وجمل المعادلات الخطية

1.V. التطبيقات المتعددة الخطية

1-1.V. تعريف: لنكن $p \in \mathbb{N}^*$ ، ولنكن E_1, E_2, \dots, E_p و F فضاءات شعاعية على حقل \mathbb{K} .

نقول عن تطبيق $f : E_1 \times E_2 \times \dots \times E_p \rightarrow F$ إنه p -خطي إذا وفقط إذا كانت التطبيقات:

$$f_{j,A_j} : E_j \rightarrow F, x_j \mapsto f(a_1, \dots, a_{j-1}, x_j, a_{j+1}, \dots, a_p)$$

خطية، وذلك أياً كان $j \in \mathbb{N}_p$ ، وأياً كانت $A_j = (a_1, \dots, a_{j-1}, a_{j+1}, \dots, a_p)$ من

$$E_1 \times \dots \times E_{j-1} \times E_{j+1} \times \dots \times E_p.$$

ونرمز بالرمز $\mathcal{L}_p(E_1, \dots, E_p; F)$ إلى مجموعة التطبيقات الـ p -خطية من الفضاء

$E_1 \times E_2 \times \dots \times E_p$ إلى F . وهي تكون فضاءً شعاعياً على الحقل \mathbb{K} .

وأخيراً، عندما يكون الفضاء الشعاعي F هو الحقل \mathbb{K} نفسه، نسمي عناصر الفضاء

الشعاعي $\mathcal{L}_p(E_1, \dots, E_p; \mathbb{K})$ أشكالاً p -خطية على $E_1 \times E_2 \times \dots \times E_p$.

2-1.V. ملاحظة: أياً كان التطبيق الـ p -خطي $f : E_1 \times E_2 \times \dots \times E_p \rightarrow F$ ، تتحقق

الخاصة التالية:

$$\forall (x_1, \dots, x_p) \in E_1 \times \dots \times E_p, (\exists j \in \mathbb{N}_p, x_j = 0) \Rightarrow f(x_1, \dots, x_p) = 0$$

وذلك لأنه وفقاً لتعريف التطبيقات الـ p -خطية يكون التطبيق $f_{j,(x_1, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_p)}$ خطياً.

3-1.V. تعريف: لتكن $p \in \mathbb{N}^*$ ، وليكن E و F فضاءين شعاعيين على حقل IK . نقول عن تطبيق p -خطي f من $\mathcal{L}_p(E^p; F)$ إنه متناظر^٤ إذا وفقط إذا كان:

$$\forall (i, j) \in \mathbb{N}_p^2, \forall (x_1, \dots, x_p) \in E^p, \\ i < j \Rightarrow f(x_1, \dots, x_i, \dots, x_j, \dots, x_p) = f(x_1, \dots, x_j, \dots, x_i, \dots, x_p)$$

ونقول عن التطبيق الـ p -خطي f إنه متناظر^٥ إذا وفقط إذا كان:

$$\forall (i, j) \in \mathbb{N}_p^2, \forall (x_1, \dots, x_p) \in E^p, \\ i < j \Rightarrow f(x_1, \dots, x_i, \dots, x_j, \dots, x_p) = -f(x_1, \dots, x_j, \dots, x_i, \dots, x_p)$$

وأخيراً نقول عن التطبيق الـ p -خطي f إنه متناوب^٦ إذا وفقط إذا كان:

$$\forall (i, j) \in \mathbb{N}_p^2, \forall (x_1, \dots, x_p) \in E^p, \\ (i < j) \wedge (x_i = x_j) \Rightarrow f(x_1, \dots, x_i, \dots, x_j, \dots, x_p) = 0$$

ونرمز بالرمز $\mathcal{L}_p^S(E^p; F)$ إلى فضاء التطبيقات الـ p -خطية المتناظرة من E^p إلى F ، وبالرمز $\mathcal{L}_p^A(E^p; F)$ إلى فضاء التطبيقات الـ p -خطية المتناوبة من E^p إلى F .

4-1.V. صياغة جديدة: ليكن $p \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ ، وليكن E و F فضاءين شعاعيين على حقل IK . أيأ كان التطبيق الـ p -خطي f من $\mathcal{L}_p(E^p; F)$ ، وأيأ كان التبديل σ من S_p ، نرمز بالرمز $\bar{\sigma}(f)$ إلى التطبيق الـ p -خطي المعرف بالعلاقة

$$\forall (x_1, \dots, x_p) \in E^p, \quad \bar{\sigma}(f)(x_1, \dots, x_p) = f(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(p)})$$

وهكذا، يمكننا صياغة التعريف السابق كما يلي:

- يكون $f \in \mathcal{L}_p(E^p; F)$ متناظراً إذا وفقط إذا كان: $\forall \sigma \in S_p, \bar{\sigma}(f) = f$.
 - ويكون $f \in \mathcal{L}_p(E^p; F)$ متناظراً إذا وفقط إذا كان: $\forall \sigma \in S_p, \bar{\sigma}(f) = \Delta(\sigma) \cdot f$.
- حيث $\Delta(\sigma)$ هو توقيع التبديل σ ، ويساوي $(-1)^{k_\sigma}$ إذا أمكن كتابة σ كتابع تركيب k_σ مناقلة^٧.

^٤ راجع خواص الزمرة المتناظرة في كتاب مبادئ الجبر المتعدد.

1.1-5. مبرهنة : ليكن $p \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$ ، وليكن E و F فضاءين شعاعيين على حقل \mathbb{K} .

وليكن التطبيق p -خطي f من $\mathcal{L}_p(E^p; F)$. عندئذ

1. إذا كان f متناوباً، كان f تحالفياً.
2. وإذا كان العدد المميز لـ \mathbb{K} مختلفاً عن 2، وكان f تحالفياً، كان f متناوباً.

الإثبات

1. لنفترض أن f متناوب. وليكن $\mathbb{N}_p^2 \ni (i, j)$ بحيث $i < j$ ، و $E^p \ni \{x_1, \dots, x_p\}$.

عندئذ يكون لدينا

$$\begin{aligned} 0 = f(x_1, \dots, \underbrace{x_i + x_j}_{\text{الموقع } i}, \dots, \underbrace{x_i + x_j}_{\text{الموقع } j}, \dots, x_p) &= f(x_1, \dots, x_i, \dots, x_i, \dots, x_p) \\ &+ f(x_1, \dots, x_i, \dots, x_j, \dots, x_p) \\ &+ f(x_1, \dots, x_j, \dots, x_i, \dots, x_p) \\ &+ f(x_1, \dots, x_j, \dots, x_j, \dots, x_p) \end{aligned}$$

ولما كان f متناوباً، كان لدينا

$$f(x_1, \dots, x_j, \dots, x_j, \dots, x_p) = 0 \quad \text{و} \quad f(x_1, \dots, x_i, \dots, x_i, \dots, x_p) = 0$$

ينتج من ذلك أن

$$f(x_1, \dots, x_i, \dots, x_j, \dots, x_p) + f(x_1, \dots, x_j, \dots, x_i, \dots, x_p) = 0$$

وهذا يثبت أن f تحالفياً.

2. ليكن $\mathbb{N}_p^2 \ni (i, j)$ بحيث $i < j$ ، وليكن $x = (x_1, \dots, x_p) \in E^p$ ، بحيث $x_i = x_j$.

ولنتأمل المتناقلة $(i, j) = \tau_{ij} = \sigma$ ، أي التي تُبادل بين الدليلين i و j . لما كان f تحالفياً، كان

لدينا

$$\bar{\sigma}(f)(x) = \Delta(\sigma) \cdot f(x) = -f(x)$$

ولدينا، من جهة أخرى،

$$\bar{\sigma}(f)(x) = f(x)$$

لأن $x_i = x_j$. نستنتج أن $-f(x) = f(x)$ أو $2f(x) = 0$. وبالاستفادة من كون العدد المميز

للحقل \mathbb{K} لا يساوي 2، ينتج إذن أن $f(x) = 0$. والتطبيق p -خطي f متناوب. \square

تبيّن المبرهنة السابقة تكافؤ مفهومَي تناوب وتحالف التطبيقات المتعددة الخطية، عندما

يكون العدد المميز للحقل \mathbb{K} لا يساوي 2.

6-1.V. مبرهنة : ليكن $p \in \text{INV}(0,1)$ ، وليكن E و F فضاءين شعاعيين على حقل \mathbb{K} .

وليكن التطبيق p -خطي f من $\mathcal{L}_p(E^p; F)$. لتعرف التطبيق

$$\mathcal{A}(f) = \sum_{\sigma \in S_p} \Delta(\sigma) \cdot \overline{\sigma}(f)$$

عندئذ يكون $\mathcal{A}(f)$ تطبيقاً p -خطياً متناوباً، نسميه التطبيق الـ p -خطي المتناوب المني على f .

الإثبات

إن $\mathcal{A}(f)$ تطبيق p -خطي لأنه عبارة خطية بتطبيقات من $\mathcal{L}_p(E^p; F)$. لنثبت أنه متناوب.

ليكن $\text{INV}_p^2 \ni (i, j)$ ، بحيث $i < j$ ، وليكن $E^p \ni (x_1, \dots, x_p) = x$ ، بحيث $x_i = x_j$. ولتأمل المتأقلة $\tau = \tau_{ij} = (i, j)$ ، أي التي تُبادل بين الدليلين i و j . وأخيراً لنذكر بالرمز A_p الذي يرمز إلى الزمرة المتناوبة وهي الزمرة الجزئية من S_p المولّقة من التباديل التي يساوي توقيعهما +1. لتكن $B = \{\tau \circ \sigma \in S_p : \sigma \in A_p\}$ ، عندئذ تكون B هي مجموعة التباديل

ذات التوقيع -1، أي: $B = S_p \setminus A_p$. ومن ثمّ

$$\mathcal{A}(f) = \sum_{\sigma \in A_p} \Delta(\sigma) \cdot \overline{\sigma}(f) + \sum_{\sigma \in A_p} \Delta(\tau \circ \sigma) \cdot \overline{\tau \circ \sigma}(f)$$

إذن

$$\mathcal{A}(f) = \sum_{\sigma \in A_p} (\overline{\sigma}(f) - \overline{\tau \circ \sigma}(f))$$

ومنه

$$\mathcal{A}(f)(x) = \sum_{\sigma \in A_p} (f(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(p)}) - f(x_{\tau \circ \sigma(1)}, \dots, x_{\tau \circ \sigma(p)}))$$

ولكن لتكن $\sigma \in A_p$ و $\text{INV}_p \ni k$:

- فإذا كان $\sigma(k) \neq \{i, j\}$ ، كان $\sigma(k) = \tau \circ \sigma(k)$ ومن ثمّ $x_{\sigma(k)} = x_{\tau \circ \sigma(k)}$.
- وإذا كان $i = \sigma(k)$ ، كان $j = \tau \circ \sigma(k)$ ومن ثمّ $x_{\sigma(k)} = x_i = x_j = x_{\tau \circ \sigma(k)}$.
- وإذا كان $j = \sigma(k)$ ، كان $i = \tau \circ \sigma(k)$ ومن ثمّ $x_{\sigma(k)} = x_j = x_i = x_{\tau \circ \sigma(k)}$.

ينتج من ذلك أن $\mathcal{A}(f)(x) = 0$ ومن ثمّ $\mathcal{A}(f)(x) = 0$ ، ومن ثمّ $\mathcal{A}(f)(x) = 0$ ونكون بذلك قد أثبتنا أن $\mathcal{A}(f)$ متناوب، وهذا يكمل الإثبات. \square

وأخيراً نهي هذه الفقرة بالخاصة المهمة التالية للتطبيقات المتعددة الخطية المتناوبة:

7-1.1. مبرهنة : ليكن $p \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ ، وليكن E و F فضاءين شعاعيين على حقل \mathbb{K} .

وليكن التطبيق p -خطي المتناوب f من $\mathcal{L}_p^A(E^p; F)$. عندئذ لا تتغير قيمة f

عند (a_1, \dots, a_p) من E^p إذا أضفنا إلى أحد الأ. a_i وليكن a_i تركيباً خطياً ما

$$\sum_{j \in \mathbb{N}_p \setminus \{i\}} \lambda_j a_j \text{ لبقية الأشعة } (a_1, \dots, a_{i-1}, a_{i+1}, \dots, a_p), \text{ أي}$$

$$f(a_1, \dots, a_p) = f(a_1, \dots, a_{i-1}, a_i + \sum_{j \in \mathbb{N}_p \setminus \{i\}} \lambda_j a_j, a_{i+1}, \dots, a_p)$$

الإثبات

نتج صحة هذه الخاصية من المساواة البسيطة التالية:

$$\begin{aligned} f(a_1, \dots, a_{i-1}, a_i + \sum_{j \in \mathbb{N}_p \setminus \{i\}} \lambda_j a_j, a_{i+1}, \dots, a_p) &= f(a_1, \dots, a_{i-1}, a_i, a_{i+1}, \dots, a_p) \\ &+ \sum_{j \in \mathbb{N}_p \setminus \{i\}} \lambda_j f(a_1, \dots, a_{i-1}, a_j, a_{i+1}, \dots, a_p) \end{aligned}$$

□

ثم نستفيد من كون f متناوباً، فيكتمل الإثبات.

2.2. المُحدِّدات

1-2.2. مبرهنة وتعريف: ليكن E فضاءً شعاعياً بعده منته ويساوي $\mathbb{N}^* \ni n$ على حقل \mathbb{K} .

وليكن $\mathcal{E} = (e_1, \dots, e_n)$ أساساً للفضاء E . يوجد شكل n -خطي متناوب وحيد

f يُحقق الشرط $f(e_1, \dots, e_n) = 1$. نرمز إلى f بالرمز $\det_{\mathcal{E}}$ ، ونسميه المُحدِّد

بالأساس \mathcal{E} . وتكون الجملة $(\det_{\mathcal{E}})$ أساساً للفضاء $\mathcal{L}_n^A(E^n; \mathbb{K})$ ، أي يكون

$$\mathcal{L}_n^A(E^n; \mathbb{K}) = \mathbb{K} \cdot \det_{\mathcal{E}}$$

وأخيراً، إذا كان $\mathcal{E}^* = (e_1^*, \dots, e_n^*)$ هو الأساس التوحي للأساس \mathcal{E} ، كان

$$\begin{aligned} \det_{\mathcal{E}}(x_1, \dots, x_n) &= \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \Delta(\sigma) \cdot \prod_{j=1}^n \langle e_j^*, x_{\sigma(j)} \rangle \\ &= \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \Delta(\sigma) \cdot \prod_{j=1}^n \langle e_{\sigma(j)}^*, x_j \rangle \end{aligned}$$

وذلك أيّاً كان $(x_1, \dots, x_n) \in E^n$.

الإثبات

نبدأ أولاً بإثبات الوجود. ليكن الشكل الـ n -خطي على E المعرّف بالعلاقة

$$\mathfrak{g} : E^n \rightarrow \mathbb{K}, (x_1, \dots, x_n) \mapsto \prod_{j=1}^n \langle e_j^*, x_j \rangle$$

ولنضع $\det_{\mathcal{E}} = \mathcal{A}(\mathfrak{g})$. نعلم بمقتضى المبرهنة 1.V-6 أن $\det_{\mathcal{E}}$ شكل n -خطي متناوب. ويكون

$$\begin{aligned} \det_{\mathcal{E}}(x_1, \dots, x_n) &= \sum_{\sigma \in S_n} \Delta(\sigma) \cdot \bar{\sigma}(\mathfrak{g})(x_1, \dots, x_n) \\ &= \sum_{\sigma \in S_n} \Delta(\sigma) \cdot \prod_{j=1}^n \langle e_j^*, x_{\sigma(j)} \rangle \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} &= \sum_{\sigma \in S_n} \Delta(\sigma^{-1}) \cdot \prod_{j=1}^n \langle e_j^*, x_{\sigma^{-1}(j)} \rangle \\ &= \sum_{\sigma \in S_n} \Delta(\sigma) \cdot \prod_{j=1}^n \langle e_{\sigma(j)}^*, x_j \rangle \end{aligned} \quad (2)$$

ونلاحظ أن

$$\det_{\mathcal{E}}(e_1, \dots, e_n) = \sum_{\sigma \in S_n} \Delta(\sigma) \cdot \prod_{j=1}^n \langle e_j^*, e_{\sigma(j)} \rangle = \Delta(I) \cdot \prod_{j=1}^n \langle e_j^*, e_j \rangle = 1$$

وبذلك نكون قد أكملنا إثبات جزء الوجود في المبرهنة، لنثبت إذن الوحدةانية.

ليكن $\mathcal{L}_n^A(E^n; \mathbb{K}) \ni g$. ولنعرف $h = g - g(e_1, \dots, e_n) \cdot \det_{\mathcal{E}}$. من الواضح أن h شكل n -خطي متناوب ويحقق $h(e_1, \dots, e_n) = 0$. ولتأمل تطبيقاً ما $v : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^n$. إذا لم يكن v متبايناً، وجد دليلان $i \neq j$ بحيث $v(i) = v(j)$ ، وينتج من ذلك أن

$$h(e_{v(1)}, \dots, e_{v(n)}) = 0$$

لأن h متناوب.

- وإذا كان v متبايناً، كان $S_n \ni v$ وكان

$$h(e_{v(1)}, \dots, e_{v(n)}) = \bar{v}(h)(e_1, \dots, e_n) = \Delta(v) \cdot h(e_1, \dots, e_n) = 0$$

نستنتج من المناقشة السابقة أن

$$(\Rightarrow) \quad \forall (i_1, \dots, i_n) \in (\mathbb{K}^n)^n, \quad h(e_{i_1}, \dots, e_{i_n}) = 0$$

لتكن $E^n \ni (x_1, \dots, x_n)$ ، فيكون $x_j = \sum_{i=1}^n \xi_{ij} e_i$ ، $\forall j \in \mathbb{N}_n$ ، حيث $\xi_{ij} = \langle e_i^*, x_j \rangle$. وعندئذ

$$\begin{aligned} h(x_1, \dots, x_n) &= \sum_{i_1=1}^n \xi_{i_1 1} h(e_{i_1}, x_2, \dots, x_n) \\ &= \sum_{i_1=1}^n \xi_{i_1 1} \sum_{i_2=1}^n \xi_{i_2 2} h(e_{i_1}, e_{i_2}, \dots, x_n) \\ &= \sum_{i_1=1}^n \sum_{i_2=1}^n \dots \sum_{i_n=1}^n \xi_{i_1 1} \xi_{i_2 2} \dots \xi_{i_n n} h(e_{i_1}, e_{i_2}, \dots, e_{i_n}) = 0 \end{aligned}$$

□ إذن $h = 0$ أو $g = g(e_1, \dots, e_n) \cdot \det_{\mathcal{E}}$ ، وهذا يُثبت المطلوب.

2.2.V. ملاحظة: إذا كان $E^n \ni (x_1, \dots, x_n)$ ، وكان $x_j = \sum_{i=1}^n \xi_{ij} e_i$ ، $\forall j \in \mathbb{N}_n$ ، حيث

$\mathcal{E} = (e_1, \dots, e_n)$ أساس للفضاء E . كان

$$\begin{aligned} \det_{\mathcal{E}}(x_1, \dots, x_n) &= \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \Delta(\sigma) \xi_{1\sigma(1)} \xi_{2\sigma(2)} \dots \xi_{n\sigma(n)} \\ &= \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \Delta(\sigma) \xi_{\sigma(1)1} \xi_{\sigma(2)2} \dots \xi_{\sigma(n)n} \end{aligned}$$

وذلك بمقتضى المبرهنة السابقة.

3.2.V. مبرهنة: ليكن E فضاء شعاعياً بعده منه ويساوي $n \in \mathbb{N}^*$ على حقل \mathbb{K} . وليكن $\mathcal{A} = (a_1, \dots, a_n)$ عنصراً من E^n . عندئذ تكون الخواص الثلاث التالية متكافئة:

1. الجملة \mathcal{A} أساس للفضاء E .
2. أياً كان الأساس \mathcal{E} للفضاء E ، فلدينا $\det_{\mathcal{E}}(a_1, \dots, a_n) \neq 0$.
3. يوجد أساس \mathcal{E} للفضاء E ، بحيث $\det_{\mathcal{E}}(a_1, \dots, a_n) \neq 0$.

الإثبات

1. \Leftarrow 2. ليكن \mathcal{E} أساساً ما لـ E ، نجد، بمقتضى المبرهنة السابقة، عنصراً $\lambda \in \mathbb{K}$ بحيث $\det_{\mathcal{E}}(a_1, \dots, a_n) = \lambda \det_{\mathcal{A}}(a_1, \dots, a_n) = \lambda$ ، فمن جهة أولى، يكون $\det_{\mathcal{E}}(a_1, \dots, a_n) = \lambda \det_{\mathcal{A}}(a_1, \dots, a_n)$ ومن جهة ثانية، يكون $\det_{\mathcal{E}}(e_1, \dots, e_n) = \lambda \det_{\mathcal{A}}(e_1, \dots, e_n)$ ، إذن $1 = \det_{\mathcal{E}}(e_1, \dots, e_n) = \lambda \det_{\mathcal{A}}(e_1, \dots, e_n)$ ، إذن $0 \neq \lambda = \det_{\mathcal{E}}(a_1, \dots, a_n)$.

2. ⇐ 3. هذا اقتضاء تافه، لوجود أساس للفضاء E .

3. ⇐ 1. إنَّ الجملة \mathcal{A} حرة، وإلاَّ أمكن التعبير عن أحد الأشعة a_1, \dots, a_n وليكن a_i مثلاً كعبارة خطية $a_i = \sum_{j \in \mathbb{N}_n \setminus \{i\}} \lambda_j a_j$ لبقية الأشعة. ومن ثَمَّ يكون، استناداً إلى البرهنة 1.V-7 :

$$\det_E(a_1, \dots, a_n) = \det_E(a_1, \dots, a_{i-1}, a_i - \sum_{j \in \mathbb{N}_n \setminus \{i\}} \lambda_j a_j, a_{i+1}, \dots, a_n)$$

$$\det_E(a_1, \dots, a_{i-1}, 0, a_{i+1}, \dots, a_n) = 0$$

وبذلك يتم المطلوب. □

2.V-4. نتيجة: ليكن E فضاء شعاعياً بعده منه ويساوي $n \in \mathbb{N}^*$ على حقل \mathbb{K} . وليكن $\mathcal{A} = (a_1, \dots, a_n)$ جملة من E . إذا كانت \mathcal{A} جملة مرتبطة خطياً كان

$$\det_E(a_1, \dots, a_n) = 0$$

أيّاً كان الأساس \mathcal{E} للفضاء E .

3.V. مُحدّد تطبيق خطيّ من فضاء شعاعي إلى نفسه

3.V-1. مبرهنة وتعريف: ليكن E فضاء شعاعياً بعده منه ويساوي $n \in \mathbb{N}^*$ على حقل \mathbb{K} . وليكن $u \in \mathcal{L}(E)$. يوجد عنصر وحيد $\det u \in \mathbb{K}$ ، نسمّيه مُحدّد التطبيق الخطيّ u ، يُحقّق الشرط

$$\forall f \in \mathcal{L}_n^A(E^n, \mathbb{K}), \forall (x_1, \dots, x_n) \in E^n,$$

$$f(u(x_1), \dots, u(x_n)) = \det u \cdot f(x_1, \dots, x_n)$$

الإلجاب

ليكن f عنصراً من $\mathcal{L}_n^A(E^n, \mathbb{K})$. ولنعرف $\Phi_u(f)$ كما يلي

$$\Phi_u(f) : E^n \rightarrow \mathbb{K}, (x_1, \dots, x_n) \mapsto f(u(x_1), \dots, u(x_n))$$

من الواضح أنّ $\Phi_u(f)$ شكّل n -خطيّ متناوب على E . لتأمّل إذن التطبيق الخطيّ

$$\Phi_u : \mathcal{L}_n^A(E^n, \mathbb{K}) \rightarrow \mathcal{L}_n^A(E^n, \mathbb{K}), f \mapsto \Phi_u(f)$$

لما كان $\dim \mathcal{L}_n^A(E^n, \mathbb{K}) = 1$ ، كان $\dim \mathcal{L}(\mathcal{L}_n^A(E^n, \mathbb{K})) = 1$ وكان التطبيق المطابق

$(I_{\mathcal{L}(\mathcal{L}_n^A(E^n, \mathbb{K}))})$ أساساً للفضاء $\mathcal{L}(\mathcal{L}_n^A(E^n, \mathbb{K}))$. إذن يوجد عدد وحيد $\det u$ بحيث يكون

□ $\Phi_u = \det u \cdot I_{\mathcal{L}(\mathcal{L}_n^A(E^n, \mathbb{K}))}$ وتكافئ هذه المساواة العلاقة المطلوبة.

2-3.V. نتيجة: ليكن E فضاء شعاعياً بعده n ويساوي \mathbb{K} على حقل \mathbb{K} . وليكن

$\mathcal{L}(E) \ni u$ و $\mathcal{E} = (e_1, \dots, e_n)$ أساساً ما للفضاء E . عندئذ يكون

$$\det u = \det_{\mathcal{E}}(u(e_1), \dots, u(e_n))$$

الإثبات

لما كان لدينا

$$\forall f \in \mathcal{L}_n^A(E^n, \mathbb{K}), \forall (x_1, \dots, x_n) \in E^n,$$

$$f(u(x_1), \dots, u(x_n)) = \det u \cdot f(x_1, \dots, x_n)$$

□

نتجت العلاقة المطلوبة بأخذ $f = \det_{\mathcal{E}}$ و $(x_1, \dots, x_n) = \mathcal{E}$.

3-3.V. مبرهنة: ليكن E فضاء شعاعياً بعده n ويساوي \mathbb{K} على حقل \mathbb{K} . عندئذ

يكون

$$\det I_E = 1 \quad 1.$$

$$\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall u \in \mathcal{L}(E), \det(\lambda u) = \lambda^n \det u \quad 2.$$

$$\forall u \in \mathcal{L}(E), \det u = \det {}^t u \quad 3.$$

$$\forall (u, v) \in (\mathcal{L}(E))^2, \det u \circ v = \det u \cdot \det v \quad 4.$$

الإثبات

ليكن $\mathcal{E} = (e_1, \dots, e_n)$ أساساً ما للفضاء E ، وليكن $\mathcal{E}^* = (e_1^*, \dots, e_n^*)$ الأساس

التبوي للأساس \mathcal{E} .

1. نعلم بمقتضى المبرهنة السابقة أن

$$\det I_E = \det_{\mathcal{E}}(I_E(e_1), \dots, I_E(e_n)) = \det_{\mathcal{E}}(e_1, \dots, e_n) = 1$$

2. وكذلك لدينا

$$\det(\lambda u) = \det_{\mathcal{E}}(\lambda u(e_1), \dots, \lambda u(e_n)) = \lambda^n \det_{\mathcal{E}}(u(e_1), \dots, u(e_n)) = \lambda^n \det u$$

3. لكن المصفوفتان $\text{mat}(u, \mathcal{E}, \mathcal{E}) = (a_{ij})$ و $\text{mat}({}^t u, \mathcal{E}^*, \mathcal{E}^*) = (b_{ij})$. نعلم أنه، أياً

كان $j \in \mathbb{N}_n$ ، فإن

$${}^t u(e_j^*) = \sum_{i=1}^n b_{ij} \cdot e_i^* \quad \text{و} \quad u(e_j) = \sum_{i=1}^n a_{ij} \cdot e_i$$

وكذلك أن $\forall (i, j) \in \mathbb{N}_n^2, a_{ij} = b_{ji}$.

لذلك يمكننا أن نكتب استناداً إلى النتيجة 2.2.V

$$\begin{aligned} \det u &= \det_{\mathcal{E}}(u(e_1), \dots, u(e_n)) = \sum_{\sigma \in S_n} \Delta(\sigma) \cdot \prod_{j=1}^n a_{\sigma(j)j} \\ &= \sum_{\sigma \in S_n} \Delta(\sigma) \cdot \prod_{j=1}^n b_{j\sigma(j)} = \det_{\mathcal{E}^*}({}^t u(e_1^*), \dots, {}^t u(e_n^*)) = \det {}^t u \end{aligned}$$

4. لما كان التطبيق

$$f : E^n \rightarrow \mathbb{K}, (x_1, \dots, x_n) \mapsto \det_{\mathcal{E}}(v(x_1), \dots, v(x_n))$$

شكلاً n -خطياً متناوباً على E ، كان

$$\forall (x_1, \dots, x_n) \in E^n, f(u(x_1), \dots, u(x_n)) = \det u \cdot f(x_1, \dots, x_n)$$

أو أياً كان $(x_1, \dots, x_n) \in E^n$ ، يكن

$$\det_{\mathcal{E}}(v \circ u(x_1), \dots, v \circ u(x_n)) = \det u \cdot \det_{\mathcal{E}}(v(x_1), \dots, v(x_n))$$

وإذا أخذنا $(e_1, \dots, e_n) = (x_1, \dots, x_n)$ نتج

$$\begin{aligned} \det v \circ u &= \det_{\mathcal{E}}(v \circ u(e_1), \dots, v \circ u(e_n)) \\ &= \det u \cdot \det_{\mathcal{E}}(v(e_1), \dots, v(e_n)) = \det u \cdot \det v \end{aligned}$$

□ وهو المطلوب إثباته.

4.3.V. مبرهنة: ليكن E فضاء شعاعياً بُعدته n ويساوي $\mathbb{K} \ni \det u$ على حقل \mathbb{K} . وليكن $\mathcal{L}(E) \ni u$ يكون u قلباً إذا وفقط إذا كان $\det u \neq 0$ ، وفي هذه الحالة يكون

$$\det u^{-1} = \frac{1}{\det u}$$

الإثبات

يكون u قلباً إذا وفقط إذا كان $n = \text{rg } u$ ، وهذا يكافئ كون $\{u(e_1), \dots, u(e_n)\}$ جملة حرة. وهذا بدوره يكافئ كون

$$\det u = \det_{\mathcal{E}}(u(e_1), \dots, u(e_n)) \neq 0$$

وتنتج المساواة الأخيرة من العلاقة $u \circ u^{-1} = I_E$ وذلك بمقتضى المبرهنة السابقة. □

4.V. مُحدّد مصفوفة مربعة

1-4.V. تعريف: لتكن $M = (a_{ij})$ مصفوفة مربعة من المرتبة n $1 \leq n$ على حقل \mathbb{K} . نسمي

محدّد أعمدة المصفوفة M بالأساس القانوني \mathcal{E}_n لـ $M_{n \times 1}(\mathbb{K})$ مُحدّد المصفوفة M

ونرمز إليه بالرمز $\det M$ ، أي

$$\det M = \det_{\mathcal{E}_n}(C_1(M), \dots, C_n(M))$$

حيث $(C_j(M))_{j \in \mathbb{N}_n}$ هي أعمدة المصفوفة M . تسمح لنا النتيجة 2-2.V. أن نكتب

إذن

$$\det M = \sum_{\sigma \in S_n} \Delta(\sigma) \cdot \prod_{i=1}^n a_{i\sigma(i)} = \sum_{\sigma \in S_n} \Delta(\sigma) \cdot \prod_{j=1}^n a_{\sigma(j)j}$$

2-4.V. ملاحظات:

❖ تبين المساواة السابقة مباشرة أنّ $\det M = \det {}^t M$.

❖ ومن ناحية أخرى، يبين التعريف السابق أنه إذا تأملنا التطبيق الخطي

$$u_M : M_{n \times 1}(\mathbb{K}) \rightarrow M_{n \times 1}(\mathbb{K}), X \mapsto M X$$

حيث $M \in M_n(\mathbb{K})$ ، كان $\det M = \det u_M$.

❖ إذا أجرى على أعمدة (أسطر) مصفوفة مربعة M ، تبديل σ ضربت قيمة $\det M$

بالعدد $\Delta(\sigma)$. وذلك لأنّ المحدّد شكل خطّي متناوب فهو إذن يتألف.

❖ لا تتغير قيمة مُحدّد مصفوفة إذا جمعنا إلى أحد أعمدتها (أسطرها) عبارة خطية في

بقية الأعمدة (الأسطر)، وذلك استناداً إلى المبرهنة 7-1.V.

❖ وبناءً على المبرهنة 3-3.V. والملاحظة الأولى يكون

$$\det I_n = 1 \quad .1$$

$$\forall \lambda \in \mathbb{K}, \quad \forall M \in M_n(\mathbb{K}), \quad \det(\lambda M) = \lambda^n \det M \quad .2$$

$$\forall (M, N) \in (M_n(\mathbb{K}))^2, \quad \det(MN) = \det M \cdot \det N \quad .3$$

5.V. حساب المحدّثات

1-5.V. مبرهنة: لتكن $M = (a_{ij})$ مصفوفة مربعة من المرتبة n حيث $1 \leq n$ على حقل \mathbb{K} . ونفترض أن $n = p + q$ حيث $(p, q) \in \mathbb{N}^2$ ، وأن المصفوفة M تكتب بالشكل

$$M = \begin{bmatrix} A & C \\ 0 & B \end{bmatrix}$$

حيث $A \in M_p(\mathbb{K})$ و $B \in M_q(\mathbb{K})$ و $C \in M_{p \times q}(\mathbb{K})$ و 0 هي المصفوفة الصفرية في $M_{q \times p}(\mathbb{K})$. عندئذ يكون $\det M = \det A \cdot \det B$.

الإثبات

لنرمز بالرموز $a_1, a_2, \dots, a_p, a_{p+1}, \dots, a_{p+1} + c_{p+1}, \dots, a_n$ إلى أعمدة المصفوفة M . أي

$$a_k = \begin{bmatrix} a_{1k} \\ \vdots \\ a_{pk} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad 1 \leq k \leq p; \quad a_k = \underbrace{\begin{bmatrix} a_{1k} \\ \vdots \\ a_{pk} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}}_{C_k} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ a_{p+1k} \\ \vdots \\ a_{nk} \end{bmatrix}}_{B_k}, \quad p+1 \leq k \leq n;$$

ليكن $\mathcal{E} = (e_1, \dots, e_n)$ الأساس القانوني لـ $M_{n \times 1}(\mathbb{K})$. ونعرّف $E' = \text{vect}(e_1, \dots, e_p)$ و $E'' = \text{vect}(e_{p+1}, \dots, e_n)$ و $E' = (e_1, \dots, e_p)$ و $E'' = (e_{p+1}, \dots, e_n)$. فيكون $\mathcal{E}' = (e_1, \dots, e_p)$ و $\mathcal{E}'' = (e_{p+1}, \dots, e_n)$. أيّا كان $j \in \mathbb{N}_p$.

لتأمل الشكل الـ p -خطي المتأواب

$$f: E'^p \rightarrow \mathbb{K}, (x_1, \dots, x_p) \mapsto \det_{\mathcal{E}}(x_1, \dots, x_p, a_{p+1}, \dots, a_n)$$

لما كان $(\det_{\mathcal{E}})$ أساساً للفضاء $\mathcal{L}_p^A(E'^p; \mathbb{K})$ أمكننا إيجاد $\lambda \in \mathbb{K}$ بحيث $f = \lambda \det_{\mathcal{E}'}$. ويكون $\lambda = f(e_1, \dots, e_p)$.

ومنه

$$(*) \quad \det M = f(a_1, \dots, a_p) = \lambda \cdot \det_{\mathcal{E}'}(a_1, \dots, a_p) = f(e_1, \dots, e_p) \cdot \det A$$

من جهة أخرى، لما كان $c_j \in E' \ni \text{vect}(e_1, \dots, e_p) = E' \ni c_j$ أيًا كان $j \in \{p+1, \dots, n\}$ ، ولأن جمع عبارة خطية ما في الأشعة (e_1, \dots, e_p) إلى العمود α_j ، حيث $j \in \{p+1, \dots, n\}$ ، لا يغير قيمة المحدد

$$\lambda = \det_{\mathcal{E}}(e_1, \dots, e_p, c_{p+1} + b_{p+1}, \dots, c_n + b_n)$$

نتج لدينا أن

$$(**) \quad \lambda = \det_{\mathcal{E}}(e_1, \dots, e_p, b_{p+1}, \dots, b_n)$$

وأخيراً، لما كان

$$g: E'^q \rightarrow \mathbb{K}, (x_{p+1}, \dots, x_n) \mapsto \det_{\mathcal{E}}(e_1, \dots, e_p, x_{p+1}, \dots, x_n)$$

شكلاً q -خطياً متناوباً على E' ، يوجد $\mu \in \mathbb{K}$ بحيث $g = \mu \det_{\mathcal{E}}$ ، ويكون

$$\mu = g(e_{p+1}, \dots, e_n) = \det_{\mathcal{E}}(e_1, \dots, e_n) = 1$$

ينتج من ذلك أن $g = \det_{\mathcal{E}}$ ، و بالاستفادة من (***) يكون

$$\lambda = \det_{\mathcal{E}}(e_1, \dots, e_p, b_{p+1}, \dots, b_n) = g(b_{p+1}, \dots, b_n) = \det_{\mathcal{E}'}(b_{p+1}, \dots, b_n) = \det B$$

وبالعودة إلى العلاقة (v) نجد $\det M = \det A \cdot \det B$ ، فيكمل الإثبات. \square

يمكننا بالتدريج تعميم المبرهنة السابقة على النحو التالي:

5.7.2. مبرهنة: لتكن $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ مصفوفة مربعة من المرتبة $n \leq 1$ على حقل \mathbb{K} . ولنفترض

أن المصفوفة M مثلثية كُتلياً، أي أنه توجد $(p_1, \dots, p_m) \in \mathbb{N}^m$ بحيث $n = \sum_{i=1}^m p_i$

وتوجد مصفوفات $(A_{i,j})_{(i,j) \in \mathbb{N}_{p_i}^2}$ بحيث تكون $A_{i,j} \in \mathcal{M}_{p_i, p_j}(\mathbb{K})$ وتكون $A_{i,j}$ مصفوفة

صفريّة حين يكون $j > i$ ، وأخيراً نُكتب M بالشكل:

$$M = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1m} \\ 0 & A_{22} & & A_{2m} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & A_{mm} \end{bmatrix}$$

عندئذ يكون $\det M = \prod_{k=1}^m \det A_{kk}$

3-5.V. مبرهنة: لتكن $M = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{K})$ مصفوفة مربعة من المرتبة $n \geq 1$ على حقل \mathbb{K} . ولنعرف أياً كانت $(i, j) \in \mathbb{N}_n^2$ المصفوفة $M_{i,j} \in M_{n-1}(\mathbb{K})$ التي نحصل عليها بحذف السطر ذي الدليل i والعمود ذي الدليل j من المصفوفة M . عندئذ يكون

$$\forall j \in \mathbb{N}_n, \quad \det M = \sum_{i=1}^n a_{ij} (-1)^{i+j} \det M_{i,j}, \quad (*)$$

$$\forall i \in \mathbb{N}_n, \quad \det M = \sum_{j=1}^n a_{ij} (-1)^{i+j} \det M_{i,j}, \quad (**)$$

الإثبات

ليكن $\mathcal{E} = (e_1, \dots, e_n)$ الأساس القانوني لـ $M_{n+1}(\mathbb{K})$. إن محدد المصفوفة M هو محدد أعمدتها بالأساس \mathcal{E} . أي

$$\forall j \in \mathbb{N}_n, \quad C_j = \sum_{i=1}^n a_{ij} e_i \quad \text{و} \quad \det M = \det_{\mathcal{E}}(C_1, \dots, C_n)$$

لنثبت عنصراً $j \in \mathbb{N}_n$. لئلا كان التطبيق

$$M_{n+1}(\mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{K}, \quad x \mapsto \det_{\mathcal{E}}(C_1, \dots, C_{j-1}, x, C_{j+1}, \dots, C_n)$$

خطئاً، كان بالإمكان أن نكتب

$$\begin{aligned} \det M &= \sum_{i=1}^n a_{ij} \cdot \det_{\mathcal{E}}(C_1, \dots, C_{j-1}, e_i, C_{j+1}, \dots, C_n) \\ &= \sum_{i=1}^n a_{ij} \cdot (-1)^{j-1} \cdot \det_{\mathcal{E}}(e_i, C_1, \dots, C_{j-1}, C_{j+1}, \dots, C_n) \end{aligned}$$

حيث نتج المساواة الأخيرة من كون توقيع الدورة $(1, 2, \dots, j)$ يساوي $\Delta(\sigma_j) = (-1)^{j-1}$.

لحساب المحدد $\det_{\mathcal{E}}(e_i, C_1, \dots, C_{j-1}, C_{j+1}, \dots, C_n)$ نقوم بتطبيق التبديل الممثل

بالدورة $\sigma_i = (1, 2, \dots, i)$ والذي يساوي توقيع $(-1)^{i-1}$ ، على أسطر المصفوفة التي

أعمدتها هي $(e_i, C_1, \dots, C_{j-1}, C_{j+1}, \dots, C_n)$ فنصبح قيمة المحدد

$$\det_{\mathcal{E}}(e_i, C_1, \dots, C_{j-1}, C_{j+1}, \dots, C_n)$$

مساوية للمقدار

$$(-1)^{i-1} \det \begin{bmatrix} 1 & a_{11} & \dots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{21} & \dots & a_{2,j-1} & a_{2,j+1} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,1} & \dots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \dots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & \dots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \dots & a_{i+1,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & a_{n1} & \dots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

ونكتب هذه النتيجة بالشكل التالي

$$\det_C(e_i, C_1, \dots, C_{j-1}, C_{j+1}, \dots, C_n) = (-1)^{i-1} \det \begin{bmatrix} 1 & a_{i1} \dots a_{in} \\ 0 & M_{ij} \\ \vdots & \\ 0 & \end{bmatrix} = (-1)^{i-1} \det M_{ij}$$

وبالعودة إلى $\det M$ نجد

$$\det M = \sum_{i=1}^n a_{ij} \cdot (-1)^{j-1} \cdot (-1)^{i-1} \det M_{ij} = \sum_{i=1}^n a_{ij} \cdot (-1)^{i+j} \cdot \det M_{ij}$$

وهذا يثبت المساواة (*).

□ ونتج المساواة (**) من السابقة بالاستفادة من كون $\det M = \det {}^t M$. ملاحظات 4.5.V :

❖ تسمى العلاقة (*) في المبرهنة السابقة نشر مُحدّد M وفق العمود ذي الدليل j . وتسمى

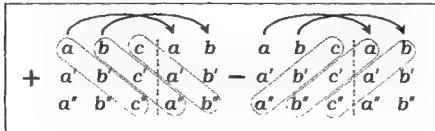
العلاقة (**) في المبرهنة نفسها نشر مُحدّد M وفق السطر ذي الدليل i .

❖ نتج من المبرهنة السابقة الحالتان الخاصتان التاليتان :

$$\det \begin{bmatrix} a & b \\ a' & b' \end{bmatrix} = ab' - ba'$$

$$\det \begin{bmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{bmatrix} = ab'c'' + a'b''c + a''bc' - a''b'c - a'bc'' - ab''c' \quad ,$$

حيث يمكننا تذكر هذه القاعدة باستخدام الطريقة الموضحة في الشكل التالي:



5.5.V. تعريف: لتكن $M = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{K})$ مصفوفة مربعة من المرتبة $n \leq 1$ على حقل \mathbb{K} .

ولنعرف أياً كانت $\mathbb{N}_n^2 \ni (i, j)$ المصفوفة $M_{i,j} \in M_{n-1}(\mathbb{K})$ التي نحصل عليها بحذف السطر ذي الدليل i والعمود ذي الدليل j من المصفوفة M . ونضع

$$A_{i,j} = (-1)^{i+j} \det M_{i,j}$$

نسمي العدد $A_{i,j}$ تمام العامل $a_{i,j}$ في المصفوفة M . ونرمز بالرمز $\text{com}(M)$ إلى

المصفوفة المربعة $(A_{i,j}) \in M_n(\mathbb{K})$ ، ونسميها تمام المصفوفة M .

6.5.V. مبرهنة: لتكن $M = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{K})$ مصفوفة مربعة من المرتبة $n \leq 1$ على حقل \mathbb{K} .

عندئذ يكون

$$M {}^t\text{com}(M) = {}^t\text{com}(M) M = (\det M) \cdot I_n$$

الإثبات

سنحفظ بالرموز الواردة في التعريف السابق، ولتكن $M {}^t\text{com}(M) = (\gamma_{ij})$. عندئذ

$$\gamma_{i,j} = \sum_{k=1}^n a_{ik} A_{jk} = \sum_{k=1}^n a_{ik} (-1)^{j+k} \det M_{j,k}$$

♦ فإذا كان $i = j$ مثلت العلاقة السابقة نشرَ مُحَدَّد M وفق السطر ذي الدليل i . إذن يكون $\gamma_{i,i} = \det M$ في هذه الحالة.

♦ وإذا كان $i \neq j$ مثلت العلاقة السابقة النشرَ وفق السطر ذي الدليل i ، مُحَدَّد المصفوفة \tilde{M} التي نتج من M باستبدال السطر ذي الدليل i بالسطر ذي الدليل j . فيكون في هذه الحالة $\gamma_{i,j} = \det \tilde{M} = 0$ لأنَّ للمصفوفة \tilde{M} سطرين متماثلين.

نكون قد أثبتنا أنَّ $(\det M) \cdot I_n = {}^t\text{com}(M) M$ ، ويثبت القارئ بأسلوب مماثل أنَّ

$$M {}^t\text{com}(M) = (\det M) \cdot I_n. \quad \square$$

7.5.V. نتيجة: لتكن $M = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{K})$ مصفوفة مربعة من المرتبة $n \leq 1$ على حقل \mathbb{K} .

إذا كانت M قَلْوِيَّة، أي $M \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ ، كان

$$M^{-1} = \frac{1}{\det M} {}^t\text{com}(M)$$

8-5.V. مثال تقليدي: لتكن $(\xi_1, \dots, \xi_n) \in \mathbb{K}^n$ ، وليكن

$$V(\xi_1, \dots, \xi_n) = \det \begin{bmatrix} 1 & \xi_1 & \xi_1^2 & \dots & \xi_1^{n-1} \\ 1 & \xi_2 & \xi_2^2 & & \xi_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \xi_n & \xi_n^2 & \dots & \xi_n^{n-1} \end{bmatrix} = \det(\xi_i^{j-1})_{(i,j) \in \mathbb{N}_n^2}$$

والمطلوب هو حساب المحدد $V(\xi_1, \dots, \xi_n)$ ، الذي يسمى محدد VAN DER MONDE.

سنفرض فيما يلي أن القيم ξ_1, \dots, ξ_n مختلفة مثنى مثنى وإلا كانت قيمة المحدد المطلوب صفراً لتساوي سطرين في المصفوفة المدروسة في تلك الحالة.

لتأمل كثير الحدود P من $\mathbb{K}[X]$ المعرّف كما يلي

$$P(X) = \det \begin{bmatrix} 1 & \xi_1 & \xi_1^2 & \dots & \xi_1^{n-1} \\ 1 & \xi_2 & \xi_2^2 & & \xi_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & X & X^2 & \dots & X^{n-1} \end{bmatrix} = V(\xi_1, \dots, \xi_{n-1}, X)$$

من الواضح أن $\deg P \leq n-1$ ، وأن $P(\xi_k) = 0 \quad \forall k \in \mathbb{N}_{n-1}$. ينتج من ذلك أن

$$P(X) = \lambda \cdot \prod_{k=1}^{n-1} (X - \xi_k)$$

حيث λ هي أمثال X^{n-1} في P ، فهي إذن $V(\xi_1, \dots, \xi_{n-1})$. ومنه

$$P(X) = V(\xi_1, \dots, \xi_{n-1}) \cdot \prod_{k=1}^{n-1} (X - \xi_k)$$

وهذا، حين تكون $X = \xi_n$ ، يقتضي أن

$$V(\xi_1, \dots, \xi_{n-1}, \xi_n) = V(\xi_1, \dots, \xi_{n-1}) \cdot \prod_{k=1}^{n-1} (\xi_n - \xi_k)$$

وتسمح العلاقة السابقة من ثَمَّ أن نثبت بالتدريج

$$V(\xi_1, \dots, \xi_{n-1}, \xi_n) = (\xi_2 - \xi_1) \cdots \prod_{k=1}^{m-1} (\xi_m - \xi_k) \cdots \prod_{k=1}^{n-2} (\xi_{n-1} - \xi_k) \cdot \prod_{k=1}^{n-1} (\xi_n - \xi_k)$$

أو

$$V(\xi_1, \dots, \xi_n) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (\xi_j - \xi_i)$$

6.5. حل المعادلات الخطية

ليكن IK حقلاً تبديلياً، ولتكن الجماعتان $(a_{ij})_{(i,j) \in \mathbb{N}_n \times \mathbb{N}_p}$ و $(\beta_i)_{i \in \mathbb{N}_n}$ من IK .

نسمي جملة المعادلات

$$\mathcal{L} : \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1p}x_p = \beta_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2p}x_p = \beta_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{np}x_p = \beta_n \end{cases}$$

جملة n معادلة خطية ذات p مجهولاً هي x_p, \dots, x_1 .

ويمكننا أن نربط بجملة المعادلات الخطية \mathcal{L} جملة معادلات خطية أخرى \mathcal{H} نسميها

جملة المعادلات الخطية المتجانسة الموافقة لـ \mathcal{L} ، وهي

$$\mathcal{H} : \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1p}x_p = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2p}x_p = 0 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{np}x_p = 0 \end{cases}$$

وإذا رمزنا بالرمز $B_{\mathcal{L}}$ إلى الشعاع $\{ \beta_1, \dots, \beta_n \} \in M_{n,1}(IK)$ ورمزنا، حين يكون $j \in \mathbb{N}_p$ ،

بالرمز C_j إلى الشعاع $\{ a_{1j}, \dots, a_{nj} \} \in M_{n,1}(IK)$ ، كُتبت جملة المعادلات الخطية \mathcal{L}

بالشكل المكافئ التالي، والذي يسمي الشكل الشعاعي للجملة الخطية \mathcal{L} :

$$\mathcal{L}_1 : x_1 \cdot C_1 + x_2 \cdot C_2 + \dots + x_p \cdot C_p = B_{\mathcal{L}}$$

وكذلك إذا رمزنا بالرمز X إلى الشعاع المجهول $\{ x_1, \dots, x_p \} \in M_{p,1}(IK)$ ، وبالرمز $A_{\mathcal{L}}$

إلى المصفوفة من $M_{n \times p}(IK)$ التي أعمدها هي C_1, C_2, \dots, C_p ، كُتبت جملة المعادلات الخطية

\mathcal{L} بالشكل المكافئ التالي، والذي يسمي الشكل المصفوفي للجملة الخطية \mathcal{L} :

$$\mathcal{L}_2 : A_{\mathcal{L}} X = B_{\mathcal{L}}$$

وأخيراً إذا رمزنا بالرمز $u_{\mathcal{L}}$ إلى التطبيق الخطي

$$u_{\mathcal{L}} : M_{p,1}(IK) \rightarrow M_{n,1}(IK), Y \mapsto A_{\mathcal{L}} Y$$

كُتبت جملة المعادلات الخطية \mathcal{L} بالشكل المكافئ التالي، والذي يسمي الشكل الهندسي للجملة

الخطية \mathcal{L} :

$$\mathcal{L}_3 : u_{\mathcal{L}}[X] = B_{\mathcal{L}}$$

لما كانت رتبة التطبيق الخطي u_L هي نفسها رتبة المصفوفة A_L ، وهي كذلك تساوي رتبة جملة الأشعة C_1, C_2, \dots, C_p . كان بالإمكان أن نضع التعريف التالي:

6.V.1. تعريف: نسمي رتبة جملة المعادلات الخطية L ، أيًا من الأعداد المتساوية التالية: رتبة التطبيق الخطي u_L ، أو رتبة المصفوفة A_L ، أو رتبة جملة الأشعة C_1, C_2, \dots, C_p . ونرمز إلى هذه الرتبة بالرمز $rg L$.

6.V.2. مبرهنة: سنحتفظ بالرموز والتعاريف السابقة، عندئذ

1. إذا كان $rg L = n = p$ ، قُبِلَتْ جملة المعادلات الخطية L (التي تسمى في هذه الحالة جملة كرامر Cramer) حلاً، وحلاً وحيداً فقط.

2. إذا رمزنا بالرمز $S(\mathcal{H})$ إلى مجموعة حلول الجملة المتجانسة \mathcal{H} ، كان $S(\mathcal{H})$ فضاء شعاعياً جزئياً من $M_{p,n}(\mathbb{K})$ بعده يساوي $p - rg L$.

3. تقبل الجملة L حلاً، إذا وفقط إذا انتمى الشعاع B_L إلى صورة التطبيق الخطي u_L ، أي كان $B_L \in \text{Im } u_L$. وفي هذه الحالة، إذا كان X_0 حلاً ما للجملة L ، وكانت $S(L)$ هي مجموعة حلول الجملة L ، كان

$$S(L) = \{X_0 + X : X \in S(\mathcal{H})\} = X_0 + S(\mathcal{H})$$

الإلبيات

□ إن الإلبيات بسيط جداً ومتروك تمريناً للقارئ.

6.V.3. تعريف: نقول عن جملتي معادلات خطية L و L' إنهما متكافئتان، إذا وفقط إذا كان لهما مجموعة الحلول نفسها، أي $S(L) = S(L')$.

تقوم الدراسة العملية لجملة معادلات خطية L على إخضاع هذه الجملة لعمليات أولية بهدف تحويلها إلى جملة مكافئة \bar{L} ، تكون أبسط وأسهل معالجة.

لنتأمل من جديد الجملة \mathcal{L} ، ولترمز بالرمز \mathcal{L}_i إلى المعادلة ذات الرقم i ، وأخيراً لنذكر بالرمز $(E_{ij})_{(i,j) \in \mathbb{N}^2}$ للدلالة على الأساس القانوني في $M_n(\mathbb{K})$. نسمي عملية أولية أحد التحويلات التالية:

❖ المبادلة بين المعادلتين \mathcal{L}_i و \mathcal{L}_j ، تكافئ هذه العملية ضرب كل من المصفوفة $A_{\mathcal{L}}$ والشعاع $B_{\mathcal{L}}$ من اليسار بالمصفوفة P_{ij} التالية:

$$P_{ij} = \begin{bmatrix} \downarrow i & & & \downarrow j & & \\ 1 & 0 & & & & 0 \\ 0 & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & 0 & \dots & 1 & \\ & & \vdots & & \vdots & \\ & & \vdots & & \vdots & \\ & & \vdots & & \vdots & \\ & & 1 & \dots & 0 & \\ & & & & 1 & \ddots \\ 0 & & & & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} \leftarrow i \\ \\ \\ \leftarrow j \\ \end{matrix}$$

$$= I - E_{ii} - E_{jj} + E_{ij} + E_{ji}$$

والجملة التي نحصل عليها بعد إجراء هذه العملية تكافئ الأولى لأن المصفوفة P_{ij} قلوية.

❖ استبدال \mathcal{L}_i بالمعادلة $\mathcal{L}_i + \lambda \cdot \mathcal{L}_j$ حيث $\mathbb{K} \ni \lambda$ ، و $i \neq j$ ، تكافئ هذه العملية ضرب كل من المصفوفة $A_{\mathcal{L}}$ والشعاع $B_{\mathcal{L}}$ من اليسار بالمصفوفة القلوية $I_n + \lambda E_{ij}$:

$$I_n + \lambda E_{ij} = \begin{bmatrix} \downarrow j & & \\ 1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{bmatrix} \leftarrow i$$

❖ استبدال \mathcal{L}_i بالمعادلة $\lambda \cdot \mathcal{L}_i$ حيث $\mathbb{K}^* \ni \lambda$ ، تكافئ هذه العملية ضرب كل من المصفوفة $A_{\mathcal{L}}$ والشعاع $B_{\mathcal{L}}$ من اليسار بالمصفوفة القلوية $I_n + (\lambda - 1)E_{ii}$:

$$I_n + (\lambda - 1)E_{ii} = \begin{bmatrix} \downarrow i & & \\ 1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{bmatrix} \leftarrow i$$

يسمح الاختيار المناسب لهذه العمليات الأولية بتحويل الجملة الخطية \mathcal{L} إلى جملة مكافئة

$$\tilde{\mathcal{L}} : \tilde{A}X = \tilde{B}$$

حيث يكون للمصفوفة \tilde{A} الشكل التالي

$$\tilde{A} = \begin{matrix} & \xrightarrow{r} \\ \begin{matrix} \uparrow r \\ \downarrow r \end{matrix} & \begin{bmatrix} x & \dots & x & x & \dots & x \\ 0 & \ddots & & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & x & x & \dots & x \\ & & \ddots & x & \dots & x \\ & & & 0 & & 0 \\ \vdots & & & & & \vdots \\ 0 & \dots & & & \dots & 0 \end{bmatrix} \end{matrix} = (\tilde{a}_{ij})$$

مع الشرط $\tilde{a}_{11} \cdot \tilde{a}_{22} \dots \tilde{a}_{rr} \neq 0$ ، وللشعاع \tilde{B} الشكل $[\tilde{b}_1, \dots, \tilde{b}_r, \dots, \tilde{b}_n]$.
وهنا نناقش الحالات التالية:

1. حالة $n = r < p$. فتكون الجملة حُلولة، وبالسماح لـ x_{r+1}, \dots, x_p بأخذ قيم اختيارية نحصل على جملة كرامر، متفنية سهلة الحل، وتعطي x_1, \dots, x_r بدلالة x_{r+1}, \dots, x_p .
2. حالة $n = r = p$. فتكون الجملة جملة كرامر، متفنية سهلة الحل.
3. حالة $n > r$ ، و $[\tilde{b}_{r+1}, \dots, \tilde{b}_n] \neq 0$. لا تقبل الجملة في هذه الحالة حُلولة.
4. حالة $n > r$ ، و $[\tilde{b}_{r+1}, \dots, \tilde{b}_n] = 0$. الجملة حُلولة، وتؤول الجملة في هذه الحالة إلى الحالة الأولى.

4-6.V مثال: حل الجملة الخطية التالية

$$\mathcal{L} : \begin{cases} L_1 : & y + z = 5 \\ L_2 : & 2x + y + 2z = 9 \\ L_3 : & 3x + y - z = 4 \end{cases}$$

لتسهيل عرض الحل ستقوم بتمثيل التحويلات الأولية ببساطة، كما في الشكل الآتي، حيث وضعنا في العمود الأول أمثال x ، وفي العمود الثاني أمثال y ، ووضعنا أمثال z في العمود الثالث، وأخيراً وضعنا الطرف الثاني في العمود الرابع. إن جميع الجمل الخطية الممثلة فيما يلي متكافئة:

$$\begin{array}{ccc}
 \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 5 \\ 2 & 1 & 2 & 9 \\ 3 & 1 & -1 & 4 \end{array} \right] & \xrightarrow{L_1 \leftrightarrow L_2} & \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \\ 3 & 1 & -1 & 4 \end{array} \right] & \xrightarrow{L_3 \leftarrow L_2 - \frac{3}{2}L_1} & \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & -\frac{19}{2} & -4 & -\frac{19}{2} \end{array} \right] \\
 & & & & & & & & & & \\
 & \xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 + \frac{1}{2}L_2} & \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & -\frac{7}{2} & -7 \end{array} \right] & \xrightarrow{L_3 \leftarrow -\frac{2}{7}L_3} & \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array} \right] \\
 & & & & & & & & & & \\
 & \xrightarrow{\begin{matrix} L_2 \leftarrow L_2 - L_3 \\ L_1 \leftarrow L_1 - 2L_3 \end{matrix}} & \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array} \right] & \xrightarrow{L_1 \leftarrow L_1 - L_2} & \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array} \right] \\
 & & & & & & & & & & \\
 & \xrightarrow{L_1 \leftarrow \frac{1}{2}L_1} & \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array} \right] & & & & & & & &
 \end{array}$$

$$\tilde{\mathcal{L}}: \begin{cases} x = 1 \\ y = 3 \\ z = 2 \end{cases}$$

وهي تبين مباشرة الحل المطلوب.

5-6.V. ملاحظة هامة: إذا أردنا حل عدد من الجمل الخطية

$$\mathcal{L}_i : \mathbf{A} \mathbf{X}_i = \mathbf{B}_i, \quad i = 1, 2, \dots, k$$

لها جميعاً المصفوفة A نفسها، فمن الأفضل والأسرع إجراء العمليات الأولية على الأشعة

B_k, B_{k-1}, \dots, B_1 في آن واحد مع المصفوفة A .

لنأخذ مثلاً حالة مصفوفة قطرية $A \in M_n(\mathbb{K})$ ، وليكن $\mathcal{E} = (e_1, \dots, e_n)$ الأساس

القانوني للفضاء $M_{n,n}(\mathbb{K})$. إنَّ أعمدة المصفوفة A^{-1} هي $(A^{-1}e_1, \dots, A^{-1}e_n)$ ، وللحصول

على الشعاع $C_j = A^{-1}e_j$ ، يجب حلّ الجملة الخطية $L_j: AX = e_j$. إذن لحساب A^{-1}

نقوم بحلّ n جملة خطية:

$$\mathcal{L}_i: AX_i = e_i, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

سنبين في المثال التالي طريقة تنظيم العمليات المذكورة فيما سبق لحساب مقلوب مصفوفة:

6-6.V مثال: لنحسب مقلوب المصفوفة $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & -1 \end{bmatrix}$. يجب إذن أن نحل الجمل

الخطية الثلاث التالية: $AX = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ و $AX = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ و $AX = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ لنحصل على أعمدة A^{-1} .

سنقوم فيما يلي بتمثيل هذه الجمل الثلاث في مصفوفة واحدة وبإجراء العمليات الأولية عليها:

$$\begin{array}{l} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{L_1 \leftrightarrow L_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \\ \xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 - \frac{3}{2}L_1} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & -4 & 0 & -\frac{3}{2} & 1 \end{array} \right] \\ \xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 + \frac{1}{2}L_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{7}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & 1 \end{array} \right] \\ \xrightarrow{L_3 \leftarrow -\frac{2}{7}L_3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{7} & \frac{3}{7} & -\frac{2}{7} \end{array} \right] \\ \xrightarrow{L_2 \leftarrow L_2 - L_3, L_1 \leftarrow L_1 - 2L_3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 0 & \frac{2}{7} & \frac{1}{7} & \frac{4}{7} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{8}{7} & -\frac{3}{7} & \frac{2}{7} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{7} & \frac{3}{7} & -\frac{2}{7} \end{array} \right] \\ \xrightarrow{L_1 \leftarrow L_1 + L_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & -\frac{6}{7} & \frac{4}{7} & \frac{2}{7} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{8}{7} & -\frac{3}{7} & \frac{2}{7} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{7} & \frac{3}{7} & -\frac{2}{7} \end{array} \right] \\ \xrightarrow{L_1 \leftarrow \frac{1}{2}L_1} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{3}{7} & \frac{2}{7} & \frac{1}{7} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{8}{7} & -\frac{3}{7} & \frac{2}{7} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{7} & \frac{3}{7} & -\frac{2}{7} \end{array} \right] \end{array}$$

ونستج إذن أن: $A^{-1} = \frac{1}{7} \begin{bmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 8 & -3 & 2 \\ -1 & 3 & -2 \end{bmatrix}$



تمارين

التمرين 1. احسب المحددين التاليين :

$$\det \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 & 3 & 5 \\ 3 & 4 & 0 & 5 & 0 \\ 3 & 4 & 5 & 2 & 1 \\ 1 & 5 & 2 & 4 & 3 \\ 4 & 6 & 0 & 7 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad \det \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & 0 & 8 \\ 3 & 0 & 0 & 2 \\ 4 & 4 & 7 & 5 \end{bmatrix}$$

التمرين 2. احسب محدّد المصفوفة $M_n(\mathbb{R}) \ni A = (a_{ij})$ المعرفة بالعلاقة $a_{ij} = |i - j|$.

التمرين 3. لتكن $M_n(\mathbb{R}) \ni A = (a_{ij})$ المصفوفة المعرفة كما يلي:

$$a_{ij} = \begin{cases} a & : i > j, \\ b & : i < j, \\ x_i & : i = j. \end{cases}$$

حيث $(x_1, \dots, x_n, a, b) \in \mathbb{R}^{n+2}$. احسب $\det A$ بفرض $a \neq b$ ثم ادرس حالة

$a = b$. (يمكن دراسة التابع $x \mapsto \det A_x$ حيث A_x هي المصفوفة التي نحصل عليها

بجمع x إلى جميع ثوابت A ، والاستعانة بالتابع $(t \mapsto f(t) = \prod_{1 \leq k \leq n} (t - x_k)$).

التمرين 4. لتكن $M_n(\mathbb{R}) \ni A = (a_{ij})$ المصفوفة المعرفة بالعلاقة $a_{ij} = S_{i \wedge j}$ ، حيث S_1

و S_2 و \dots و S_n أعداد من \mathbb{R} ، و $\min(i, j) = i \wedge j$. احسب $\det A$. و طبق ذلك

$$\text{في حالة } S_k = \frac{k(k+1)}{2}.$$

التمرين 5. لتكن A و B مصفوفتين من $M_n(\mathbb{K})$. نعرّف $P \in M_{2n}(\mathbb{K})$ بأنها المصفوفة

$$P = \begin{bmatrix} A & B \\ B & A \end{bmatrix}$$

أثبت أن : $\det P = \det(A + B) \det(A - B)$.

التمرين 6. لتكن $M_n(\mathbb{R}) \ni A = (a_{ij})$ المصفوفة المعرفة، أيّا كان $\theta \in \mathbb{R}$ ، كما يلي:

$$a_{ij} = \begin{cases} 2 \cos \theta & : i = j, \\ 1 & : |i - j| = 1, \\ 0 & : |i - j| > 1. \end{cases}$$

احسب $\det A_n$.

التمرين 7. لتكن $1 \leq n$ ، ولتكن $\mathbb{K}^n \ni (a_1, \dots, a_n)$ و $\mathbb{K}^n \ni (b_1, \dots, b_n)$. نفترض أن

$$\forall (i, j) \in \mathbb{N}_n^2, a_i + b_j \neq 0$$

نسمي مصفوفة Cauchy المتعلقة بـ $(a_1, \dots, a_n; b_1, \dots, b_n)$ تلك المصفوفة

$$C(a_1, \dots, a_n; b_1, \dots, b_n) = (c_{ij}) \text{ من } \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \text{ المعرفة بالعلاقة } c_{ij} = \frac{1}{a_i + b_j}.$$

احسب المحدد $\det C(a_1, \dots, a_n; b_1, \dots, b_n) = c(a_1, \dots, a_n; b_1, \dots, b_n)$.

ادرس حالة مصفوفة Hilbert: \mathcal{H}_n الموافقة للحالة الخاصة $a_k = b_k = k - 1/2$.

التمرين 8. ادرس تبعاً لقيم الوسطاء a, b, m الجمل الخطية التالية:

$$\begin{cases} ax + by + z = 1 \\ x + aby + z = b \\ x + by + az = 1 \end{cases} \quad , \quad \begin{cases} x + y + z = m+1 \\ mx + y + (m-1)z = m \\ x + my + z = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2(a+1)x + 3y + az = a+4 \\ 4(a-1)x + (a+1)y + (2a-1)z = 2a+2 \\ (5a-4)x + (a+1)y + (3a-4)z = a-1 \end{cases}$$

التمرين 9. ادرس تبعاً لقيم الوسيطين λ و μ الجملة الخطية التالية:

$$\begin{cases} \lambda x + y + z + t = 1 \\ x + \lambda y + z + t = \mu \\ x + y + \lambda z + t = \mu^2 \\ x + y + z + \lambda t = \mu^3 \end{cases}$$

التمرين 10. احسب مقلوب كل من المصفوفات التالية:

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} 1 & 2 & 6 & 8 \\ 2 & 5 & 15 & 23 \\ 6 & 15 & 46 & 73 \\ 8 & 23 & 73 & 130 \end{bmatrix} , \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{bmatrix} \\ & \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 20 & 21 & 22 & 23 \\ 190 & 210 & 231 & 253 \\ 1140 & 1330 & 1540 & 1771 \end{bmatrix} , \quad \begin{bmatrix} 1 & -3 & 1 & 2 \\ 2 & -5 & 2 & 5 \\ 2 & -7 & 1 & 7 \\ 0 & 3 & -1 & 6 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

التمرين 11. أثبت أن المصفوفة التالية قَلْبُوبَة، أيَا كَانَتْ $n \in \mathbb{N}^*$:

$$A_n = \begin{bmatrix} \frac{1}{0!} & \frac{1}{1!} & \cdots & \frac{1}{n!} \\ \frac{1}{1!} & \frac{1}{2!} & \cdots & \frac{1}{(n+1)!} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{n!} & \frac{1}{(n+1)!} & \cdots & \frac{1}{(2n)!} \end{bmatrix}$$

التمرين 12. لتكن المصفوفات

$$A = \begin{bmatrix} 10 & 9 & 1 \\ 9 & 10 & 5 \\ 1 & 5 & 9 \end{bmatrix}, \quad b_1 = \begin{bmatrix} -5 \\ 4 \\ 18 \end{bmatrix}, \quad b_2 = \begin{bmatrix} -5 \\ 4.1 \\ 18 \end{bmatrix}$$

أوجد حلول الجملتين الخطيتين $AX_1 = b_1$ و $AX_2 = b_2$. ماذا تلاحظ؟

التمرين 13. لتكن X و Y مصفوفتين من $M_n(\mathbb{R})$.

1. أوجد شرطاً لازماً وكافياً على $\gamma = Y \cdot X$ حتى تكون المصفوفة $I_n + X \cdot Y$ قَلْبُوبَة،

واحسب مقلوبها في هذه الحالة.

2. لتكن M مصفوفة قَلْبُوبَة من $M_n(\mathbb{R})$ ، نضع $N = M + X \cdot Y$. أوجد شرطاً لازماً

وكافياً على العدد $X \cdot M^{-1} \cdot Y$ حتى تكون المصفوفة N قَلْبُوبَة، واحسب مقلوبها N^{-1}

في هذه الحالة.

3. لنضع

$$N = \begin{bmatrix} 2.01 & 3 & 5.99 & 1.98 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \\ -3 & -6 & 0 & -2 \\ 0 & 4 & 8 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad M = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 6 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \\ -3 & -6 & 0 & -2 \\ 0 & 4 & 8 & 1 \end{bmatrix}$$

احسب M^{-1} ، واستتج N^{-1} . كيف يجب تغيير الثابت $a_{24} = 1$ في M حتى تصبح

المصفوفة M غير قَلْبُوبَة؟

التمرين 14. لتكن المصفوفة

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 2 \\ 6 & 6 & 1 & 7 \\ 2 & 16 & 6 & 9 \\ 2 & 4 & 8 & 22 \end{bmatrix}$$

1. أوجد مصفوفة مثلثية عليا U ، وأخرى مثلثية سفلى L عناصرها القطرية تساوي 1، بحيث $A = L \cdot U$.

2. أوجد مقلوب كل من U و L ، ثم استنتج A^{-1} .

التمرين 15. لتكن المصفوفة

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 4 \\ -1 & 5 & 0 & -4 \\ 2 & 0 & 6 & 10 \\ 4 & -4 & 10 & 29 \end{bmatrix}$$

1. أثبت أنه توجد مصفوفة مثلثية سفلى S عناصرها القطرية موجبة تماماً، بحيث $A = S^{-1}S$.

2. أوجد مقلوب S ، ثم استنتج A^{-1} .

التمرين 16. لتكن $n \geq 2$ و $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ و $(b_1, \dots, b_n) \in \mathbb{R}^n$. نفترض أن الأعداد a_1, \dots, a_n مختلفة معنى وكذلك أن الأعداد b_1, \dots, b_n مختلفة معنى مثني، وأخيراً أن $a_i + b_j \neq 0 \forall (i, j) \in \mathbb{N}_n^2$. لتكن $(y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ ، أوجد حل الجملة الخطية

$$\sum_{j=1}^n \frac{x_j}{a_i + b_j} = y_i, \quad i \in \mathbb{N}_n$$

يمكن لتحقيق ذلك استخدام التابع الكسري $F(X) = \sum_{j=1}^n \frac{x_j}{X + b_j}$. ثم استنتج مقلوب

مصفوفة Cauchy المتعلقة بـ $(a_1, \dots, a_n; b_1, \dots, b_n)$ أي المصفوفة:

$$c_{ij} = \frac{1}{a_i + b_j} \quad \text{المعرفة بـ} \quad M_n(\mathbb{K}) \ni (a_{ij}) = C(a_1, \dots, a_n; b_1, \dots, b_n)$$

وأخيراً احسب مقلوب مصفوفة Hilbert \mathcal{H}_n الموافقة للحالة الخاصة $k = 1/2$ ،

$$b_k = k - 1/2$$

التمرين 17. أيًا كان $m \geq 1$ ، نضع $E_m = \mathcal{C}_{m-1}[X]$ فضاء كثيرات الحدود ذات الثوابت

العقدية التي لا تزيد درجتها عن $m-1$ ، ولكن فيما يلي $(n, m) \in \mathbb{N}^2$.

1. ليكن k عنصراً من \mathbb{N}_{n+m} ، نعرف العنصر e_k من $E_n \times E_m$ كما يلي:

$$e_k = \begin{cases} (X^{n-k}, 0) & : 1 \leq k \leq n \\ (0, X^{n+m-k}) & : n < k \leq n+m \end{cases}$$

أثبت أنّ الجملة $\mathcal{E} = (e_k)_{1 \leq k \leq n+m}$ أساس للفضاء $E_n \times E_m$.

2. ليكن كثير الحدود $P(X) = \sum_{k=0}^m a_k X^k$ و $Q(X) = \sum_{k=0}^n b_k X^k$ من E_{m+1} و E_{n+1}

على التوالي. نفترض أنّ $0 \neq a_m$ و $0 \neq b_n$. نضع

$$\Phi(W) = S(X)P(X) + T(X)Q(X)$$

وذلك أيًا كان $(S(X), T(X)) = W$ من $E_n \times E_m$.

i. أثبت أنّ Φ تطابق خطّي من $E_n \times E_m$ إلى E_{n+m} .

ii. ليكن $\Delta(X) = \gcd(P(X), Q(X))$ القاسم المشترك الأعظم لـ P و Q ، ولتكن

$d = \deg \Delta(X)$. نضع $P(X) = \Delta(X)P_1(X)$ و $Q(X) = \Delta(X)Q_1(X)$.

– أثبت أنّ $P_1(X)$ و $Q_1(X)$ أوليين فيما بينهما.

– أثبت أنّ $\ker \Phi = \{(-\lambda(X)Q_1(X), \lambda(X)P_1(X)) : \lambda(X) \in E_d\}$ ،

واستنتج قيمة $\dim \ker \Phi$.

iii. ليكن الأساس $\mathcal{F} = (X^{n+m-1}, X^{n+m-2}, \dots, X, 1)$ للفضاء E_{n+m} . اكتب

$\text{mat}(\Phi, \mathcal{E}, \mathcal{F})$ ثم استنتج أنّ رتبة المصفوفة $M(P, Q) \in M_{n+m}(\mathbb{C})$ التالية

$$M(P, Q) = \begin{array}{c} \begin{array}{cccccccc} & \begin{array}{c} n \\ \hline \end{array} & & & \begin{array}{c} m \\ \hline \end{array} & & & \\ & a_n & 0 & \dots & 0 & b_n & 0 & \dots & 0 \\ a_{m-1} & a_m & & & \vdots & b_{n-1} & b_n & & \vdots \\ \vdots & a_{m-1} & & & \vdots & & & & \vdots \\ \vdots & & & & \vdots & & & & \vdots \\ a_1 & & & a_m & 0 & & & b_n & 0 \\ a_0 & a_1 & & a_{m-1} & a_m & b_1 & & b_{n-1} & b_n \\ 0 & a_0 & & a_{m-1} & b_0 & b_1 & & b_{n-1} & \\ \vdots & & & \vdots & 0 & b_0 & & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots & & & & b_1 & \\ \vdots & & & a_0 & a_1 & \vdots & & b_0 & b_1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & a_0 & 0 & \dots & 0 & b_0 \end{array} \end{array}$$

تساوي درجة المضاعف المشترك الأصغر لكثيري الحدود P و Q . أي أن

$$\text{rg}(M(P, Q)) = \text{deg lcm}(P(X), Q(X))$$

3. نحتفظ برموز السؤال السابق ونضع $R(P, Q) = \det M(P, Q)$. أثبت أن P و Q

أوليان فيما بينهما إذا وفقط إذا كان $R(P, Q) \neq 0$.

4. نسمي مُميز كثير حدود P العدد $D(P) = R(P, P')$. احسب $D(P)$ في الحالة الخاصة

$$P(X) = X^3 + \alpha X + b \quad \text{واستنتج شرطاً لازماً وكافياً على } (a, b) \text{ حتى تقبل المعادلة}$$

$$P(X) = 0 \text{ جبراً مضاعفاً.}$$

5. أثبت أن شرطاً لازماً وكافياً حتى يقبل $\alpha X^2 + bX + c$ و $a'X^2 + b'X + c'$ جبراً مشتركاً هو

$$(ac' - ca')^2 = (ab' - ba') \cdot (bc' - cb')$$

6. نحتفظ برموز السؤال 2. أيأ كان كثير الحدود $U(X)$ و العدد $\alpha \in \mathbb{C}$ ، نرمز بالرمز

$\tau_\alpha(U)(X)$ إلى كثير الحدود $U(X + \alpha)$. ثم نعتبر التطبيقات الخطية التالية:

$$\begin{aligned} \Psi : E_n \times E_m &\rightarrow E_n \times E_m : (S, T) \mapsto (\tau_\alpha(S), \tau_\alpha(T)), \\ \Phi_1 : E_n \times E_m &\rightarrow E_{n+m} : (S, T) \mapsto S(X) \cdot \tau_{-\alpha}(P)(X) + T(X) \cdot Q(X), \\ \Theta : E_{n+m} &\rightarrow E_{n+m} : U \mapsto \tau_\alpha(U), \\ \Phi_2 : E_n \times E_m &\rightarrow E_{n+m} : (S, T) \mapsto S(X) \cdot P(X) + T(X) \cdot \tau_\alpha(Q)(X). \end{aligned}$$

i. أثبت أن $\Psi \circ \Phi_1 \circ \Theta = \Phi_2$ ، واستنتج أن $R(P, \tau_\alpha(Q)) = R(\tau_{-\alpha}(P), Q)$.

ii. احسب $R(P, X)$ ، ثم أثبت أن $R(P, Q) = (-1)^m P(0)$.

iii. استخدم i.6 لإثبات المساواة $R(P, (X - \alpha)Q) = (-1)^m P(\alpha) R(P, Q)$.

iv. أثبت أن $R(P, \prod_{k=1}^n (X - \alpha_k)) = (-1)^{nm} \prod_{k=1}^n P(\alpha_k)$ ، واستنتج المساواة:

$$R\left(\prod_{k=1}^m (X - \beta_k), \prod_{k=1}^n (X - \alpha_k)\right) = (-1)^{mn} \prod_{1 \leq k, j \leq n} (\alpha_k - \beta_j)$$



الفصل السادس

اختزال التطبيقات الخطية

1.VI. عموميات

1-1.VI. تعريف: ليكن E فضاءً شعاعياً مختلفاً عن $\{0\}$ على حقل تبديلي \mathbb{K} . وليكن u تطبيقاً خطياً من $\mathcal{L}(E)$. نسمي قيمة ذاتية للتطبيق الخطي u كل عنصر $\lambda \in \mathbb{K}$ يجعل $u - \lambda \cdot I_E$ غير متباين، أي يُحقق الشرط

$$\ker(u - \lambda \cdot I_E) \neq \{0\}$$

وإذا كانت λ قيمة ذاتية للتطبيق الخطي u ، أسمينا الفضاء الشعاعي الجزئي

$$E_\lambda = \ker(u - \lambda \cdot I_E)$$

الفضاء الذاتي لـ u الموافق للقيمة الذاتية λ ، وأسمينا العناصر غير المعدومة في E_λ أشعة ذاتية للتطبيق الخطي u موافقة للقيمة الذاتية λ .

وأخيراً نسمي طيف التطبيق الخطي u مجموعة قيمه الذاتية ونرمز إليه بالرمز $\text{sp}(u)$:

$$\text{sp}(u) = \{\lambda \in \mathbb{K}, \ker(u - \lambda \cdot I_E) \neq \{0\}\}$$

2-1.VI. مبرهنة: ليكن E فضاءً شعاعياً مختلفاً عن $\{0\}$ على حقل تبديلي \mathbb{K} . وليكن u تطبيقاً خطياً من $\mathcal{L}(E)$. وأخيراً لكن $(\lambda_i)_{i \in \mathbb{N}_n}$ جماعة من القيم الذاتية المختلفة مثنى

مثنى للتطبيق الخطي u . عندئذ يكون المجموع $\sum_{k=1}^n E_{\lambda_k}$ مجموعاً مباشراً.

الإثبات

لنرمز بالرمز \mathcal{P}_n إلى القضية التالية:

”أيما كانت الجملة $(\lambda_i)_{i \in \mathbb{N}_n}$ المؤلفة من n قيمة ذاتية مختلفة مثنى مثنى للتطبيق الخطي u ،

كان المجموع $\sum_{k=1}^n E_{\lambda_k}$ مجموعاً مباشراً“.

الفضية \mathcal{P}_1 صحيحة وضوحاً. لنفترض جدلاً وجود عدد k تكون عنده \mathcal{P}_k خاطئة، ولكن m أصغر عدد طبيعي أكبر تماماً من 1، بحيث تكون \mathcal{P}_m خاطئة. عندئذ توجد جماعة منتهية $(\lambda_i)_{i \in \mathbb{N}_m}$ من القيم الذاتية المختلفة معنى معنى لـ u ، بحيث لا يكون المجموع $\sum_{k=1}^m E_{\lambda_k}$ مباشراً، ومن ثم، لأن m أصغري، يمكن أن نجد عناصر x_m, \dots, x_2, x_1 بحيث

$$\forall k \in \mathbb{N}_m, \quad x_k \in E_{\lambda_k} \setminus \{0\} \quad \text{و} \quad \sum_{k=1}^m x_k = 0$$

ويكون من ثم

$$\sum_{k=1}^m \lambda_m \cdot x_k = 0 \quad \text{و} \quad 0 = u\left(\sum_{k=1}^m x_k\right) = \sum_{k=1}^m u(x_k) = \sum_{k=1}^m \lambda_k \cdot x_k$$

وينتج من ذلك، بالطرح، أن

$$\sum_{k=1}^{m-1} (\lambda_m - \lambda_k) \cdot x_k = 0$$

ولكن المجموع $\sum_{k=1}^{m-1} E_{\lambda_k}$ مباشر استناداً إلى تعريف m ، إذن

$$\forall i \in \mathbb{N}_{m-1}, \quad (\lambda_m - \lambda_i) \cdot x_i = 0$$

وهذا يقتضي أن $\forall i \in \mathbb{N}_{m-1}, \lambda_i = \lambda_m$ لأن الأشعة x_{m-1}, \dots, x_1 غير معدومة، وهذا يتناقض مع كون القيم الذاتية $(\lambda_i)_{i \in \mathbb{N}_m}$ مختلفة معنى معنى. نستنتج من ذلك أن \mathcal{P}_n صحيحة أيًا كانت n . \square

3-1.VI. نتيجة: ليكن E فضاء شعاعياً مختلفاً عن $\{0\}$ على حقل تبديلي \mathbb{K} . و ليكن u تطبيقاً خطياً من $\mathcal{L}(E)$. عندئذ يكون المجموع $\sum_{\lambda \in \text{sp}(u)} E_{\lambda}$ مجموعاً مباشراً.

سنفترض في كل ما يأتي أن E فضاء شعاعياً منتهي البعد، وبعده $1 \leq n$ ، على حقل \mathbb{K} .

4-1.VI. تمهيد: ليكن u تطبيقاً خطياً من $\mathcal{L}(E)$. عندئذ لا يتعلّق كثير الحدود

$$\mathbb{K}[X] \ni \det(\text{mat}(u, \mathcal{E}, \mathcal{E}) - X I_n)$$

بالأساس \mathcal{E} للفضاء E .

^[3] يمكن النظر إلى المصفوفة التي نحسب محددها على أنها عنصر من $M_n(\mathbb{K}(X))$ حيث $\mathbb{K}(X)$ هو حقل الكسور بمحمّل واحد X التي تواجها في \mathbb{K} .

الإثبات

$$\begin{array}{ccc} (E, \mathcal{E}) & \xrightarrow{u} & (E, \mathcal{E}) \\ I_E^{-1} \downarrow & & \uparrow I_E \\ (E, \mathcal{E}') & \xrightarrow{u} & (E, \mathcal{E}') \end{array}$$

ليكن \mathcal{E} و \mathcal{E}' أساسين للفضاء E ، لما كان المخطط المجاور تبديلياً، نجد أن

$$\text{mat}(u, \mathcal{E}, \mathcal{E}) = P_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}'} \times \text{mat}(u, \mathcal{E}', \mathcal{E}') \times (P_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}'})^{-1}$$

ومن ثم يكون

$$\text{mat}(u, \mathcal{E}, \mathcal{E}) - X I_n = P_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}'} \times (\text{mat}(u, \mathcal{E}', \mathcal{E}') - X I_n) \times (P_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}'})^{-1}$$

وهذا يقتضي أن

$$\begin{aligned} \det(\text{mat}(u, \mathcal{E}, \mathcal{E}) - X I_n) &= \det P_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}'} \cdot \det(\text{mat}(u, \mathcal{E}', \mathcal{E}') - X I_n) \cdot (\det P_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}'})^{-1} \\ &= \det(\text{mat}(u, \mathcal{E}', \mathcal{E}') - X I_n) \end{aligned}$$

□

وبذلك يكتمل الإثبات.

يسمح لنا هذا التمهيد بصياغة التعريف التالي:

5-1.VI. تعريف: ليكن u تطبيقاً خطياً من $\mathcal{L}(E)$. نسمي كثير الحدود

$$\det(\text{mat}(u, \mathcal{E}, \mathcal{E}) - X I_n)$$

حيث \mathcal{E} هو أساس ما للفضاء E ، كثير الحدود المميز للتطبيق الخطي u ، ونرمز إليه بالرمز $\chi_u(X)$.

6-1.VI. نتيجة: ليكن u تطبيقاً خطياً من $\mathcal{L}(E)$. إن القيم الذاتية للتطبيق الخطي u هي

جذور كثير الحدود المميز $\chi_u(X)$ لـ u ، أي

$$\text{sp}(u) = \{ \lambda \in \mathbb{K} : \chi_u(\lambda) = 0 \}$$

7-1.VI. تعريف: ليكن u تطبيقاً خطياً من $\mathcal{L}(E)$. نسمي رتبة مضاعفة القيمة الذاتية λ

للتطبيق الخطي u ، رتبة مضاعفة λ كجذر لكثير الحدود $\chi_u(X)$ ، ونرمز إليها بالرمز $m_u(\lambda)$. فيكون

$$m_u(\lambda) = k \Leftrightarrow ((X - \lambda)^k \mid \chi_u(X)) \wedge ((X - \lambda)^{k+1} \nmid \chi_u(X))$$

لنذكر بالرمز $C_J(B)$ الذي يدلّ على العمود ذي الدليل J في المصفوفة $B \in M_n(\mathbb{K})$.
 ليكن \mathcal{E} الأساس القانوني في $M_{n+1}(\mathbb{K})$ ، ولتكن A_0 و A_1 مصفوفتين من $M_n(\mathbb{K})$.
 لما كان $\det_{\mathcal{E}} -n$ خطأً أمكننا أن نكتب

$$(*) \quad \det(A_0 + A_1) = \sum_{j_1=0}^1 \sum_{j_2=0}^1 \dots \sum_{j_n=0}^1 \det_{\mathcal{E}}(C_1(A_{j_1}), C_1(A_{j_2}), \dots, C_1(A_{j_n}))$$

فإذا كانت J مجموعة جزئية من \mathbb{N}_n ، عرفنا المصفوفة A_J من أعمدتها على النحو التالي:

$$C_J(A_J) = \begin{cases} C_J(A_1) & : j \in J, \\ C_J(A_0) & : j \notin J. \end{cases}$$

يسمح لنا هذا الرمز الجديد بكتابة العلاقة (*) بالشكل

$$(*) \quad \det(A_0 + A_1) = \sum_{J \subset \mathbb{N}_n} \det A_J$$

فإذا استخدمنا العلاقة (*) في حساب $\det(M - X I_n)$ بوضع $A_0 = -X I_n$ و $A_1 = M$ حصلنا على

$$\det(M - X I_n) = (-X)^n + \sum_{\emptyset \neq J \subset \mathbb{N}_n} (-X)^{n-\text{card}(J)} \cdot \det M_{J,J}$$

حيث $M_{J,J}$ هي المصفوفة المربعة من المرتبة $\text{card}(J)$ ، التي نحصل عليها من M بعد حذف الأعمدة والأسطر التي لا تنتمي أداتها إلى J . وأخيراً نجد

$$\det(M - X I_n) = (-X)^n + \sum_{k=1}^n (-X)^{n-k} \sum_{J \in P_k^{(n)}} \det M_{J,J}$$

حيث $P_k^{(n)}$ هي مجموعة أجزاء \mathbb{N}_n التي يساوي عدد عناصر كل منها k .
 نكون بذلك قد أثبتنا المبرهنة الهامة التالية:

8.1.VI. مبرهنة: لتكن M مصفوفة مربعة من المرتبة n . عندئذ يكون

$$\det(M - X I_n) = (-X)^n + \sum_{k=1}^n (-1)^{n-k} \tau_k(M) \cdot X^{n-k}$$

حيث $\tau_k(M) = \sum_{J \in P_k^{(n)}} \det M_{J,J}$ و $P_k^{(n)}$ هي مجموعة أجزاء \mathbb{N}_n التي يساوي عدد

عناصر كل منها k ، و $M_{J,J}$ هي المصفوفة المربعة من المرتبة $\text{card}(J)$ ، التي نحصل عليها من M بعد حذف الأعمدة والأسطر التي لا تنتمي أداتها إلى J . ونلاحظ بوجه

خاص أن $\det(M - X I_n)$ هو كثير حدود من الدرجة n ، حده المسيطر هو $(-1)^n X^n$ وحده الثابت هو $\det M$ ، وحده ذو الدرجة $n-1$ هو $(-1)^{n-1} \text{tr } M \cdot X^{n-1}$.

9.1.VI. نتيجة: ليكن u تطبيقاً خطياً من $\mathcal{L}(E)$. عندئذ يكون كثير حدوده المميز $\chi_u(X)$ كثير حدود من الدرجة n في $\mathbb{K}[X]$ ، حده المسيطر هو $(-1)^n X^n$ وحده الثابت هو $\det u$ ، وحده ذو الدرجة $n-1$ هو $(-1)^{n-1} \text{tr } u \cdot X^{n-1}$. وبوجه خاص إذا كان \mathbb{K} هو حقل الأعداد العقدية \mathbb{C} ، كان طيف التطبيق u غير خال، أي $\text{sp}(u) \neq \emptyset$.

10.1.VI. مبرهنة: ليكن u تطبيقاً خطياً من $\mathcal{L}(E)$. عندئذ تتحقق الخواص التالية:

1. إنَّ للتطبيقين الخطيين u و u' كثير الحدود المميز نفسه.
2. ليكن F فضاء شعاعياً جزئياً مختلفاً عن $\{0\}$ من E ، بحيث $u(F) \subset F$ ولنرمز بالرمز $v = u|_F$ إلى التطبيق الخطي من $\mathcal{L}(F)$ الذي يُحرَّضه u على F أي $v: F \rightarrow F, x \mapsto u(x)$.

عندئذ يقسم كثير الحدود $\chi_v(X)$ كثير الحدود $\chi_u(X)$.

3. ليكن F و G فضاءين شعاعيين جزئيين مختلفين عن $\{0\}$ من E ، بحيث $u(F) \subset F$ و $u(G) \subset G$. نفترض أيضاً أنَّ الفضاءين F و G متتامان، أي $E = F \oplus G$. عندئذ يكون $\chi_u(X) = \chi_v(X) \cdot \chi_w(X)$ حيث $v = u|_F \in \mathcal{L}(F)$ و $w = u|_G \in \mathcal{L}(G)$.

الإنثبات

1. ليكن \mathcal{E} أساساً للفضاء الشعاعي E ، وليكن \mathcal{E}^* الأساس الثنوي للأساس \mathcal{E} . نعلم أنه إذا كانت $M = \text{mat}(u, \mathcal{E}, \mathcal{E})$ كانت ${}^t M = \text{mat}({}^t u, \mathcal{E}^*, \mathcal{E}^*)$ ، ومن ثمَّ $\chi_u(X) = \det(M - X I_n) = \det({}^t M - X I_n) = \chi_{{}^t u}(X)$.
2. ليكن $\mathcal{E}' = (e_1, \dots, e_r)$ أساساً لـ F ، ولتتممه إلى أساس $\mathcal{E} = (e_1, \dots, e_n)$ لـ E . نكتب مصفوفة u في هذا الأساس بالشكل

$$M = \text{mat}(u, \mathcal{E}, \mathcal{E}) = \begin{bmatrix} P & R \\ 0 & Q \end{bmatrix}$$

حيث $P = \text{mat}(v, \mathcal{E}', \mathcal{E}')$. إذن

$$\begin{aligned} \chi_u(X) &= \det(M - X I_n) = \det(P - X I_r) \cdot \det(Q - X I_{n-r}) \\ &= \chi_v(X) \cdot \det(Q - X I_{n-r}) \end{aligned}$$

3. ليكن $\mathcal{E}' = (e_1, \dots, e_r)$ أساساً لـ F ، وليكن $\mathcal{E}'' = (e_{r+1}, \dots, e_n)$ أساساً لـ G ، عندئذ يكون $\mathcal{E} = (e_1, \dots, e_n)$ أساساً لـ E . وتكتب مصفوفة u في هذا الأساس بالشكل

$$M = \text{mat}(u, \mathcal{E}, \mathcal{E}) = \begin{bmatrix} P & 0 \\ 0 & Q \end{bmatrix}$$

حيث $P = \text{mat}(v, \mathcal{E}', \mathcal{E}')$ و $Q = \text{mat}(w, \mathcal{E}'', \mathcal{E}'')$ إذن

$$\chi_u(X) = \det(M - X I_n) = \det(P - X I_r) \cdot \det(Q - X I_{n-r})$$

$$= \chi_v(X) \cdot \chi_w(X)$$

□

وهو المطلوب إثباته.

1.1.VI. نتيجة: ليكن u تطبيقاً خطياً من $\mathcal{L}(E)$. ولتكن λ قيمة ذاتية للتطبيق الخطي u . عندئذ يكون بُعد الفضاء الذاتي الموافق للقيمة الذاتية λ ، أي $E_\lambda = \ker(u - \lambda I_E)$ أصغر أو يساوي رتبة مضاعفة القيمة الذاتية λ . أي

$$\forall \lambda \in \text{sp}(u), \quad 1 \leq \dim E_\lambda \leq m_u(\lambda)$$

الإثبات

ليكن $F = E_\lambda$ ، عندئذ يكون F فضاء شعاعياً جزئياً مختلفاً عن $\{0\}$ من E ، يُحقق $u(F) \subset F$. ويكون أيضاً $v = u|_F = \lambda I_F$. إذن $\chi_v(X) = (\lambda - X)^{\dim F}$ وهو يقسم كثير الحدود $\chi_u(X)$ بمقتضى المبرهنة السابقة. ولكن

□

$$(\lambda - X)^{\dim F} \mid \chi_u(X) \Rightarrow \dim F \leq m_u(\lambda)$$

2.VI. التطبيقات الخطية القابلة للتمثيل بمصفوفات قطرية

1.2.VI. مبرهنة: ليكن u تطبيقاً خطياً من $\mathcal{L}(E)$. عندئذ تكون الخاصتان التاليتان متكافئتين:

1. يوجد أساس \mathcal{E} لـ E بحيث تكون المصفوفة $\text{mat}(u, \mathcal{E}, \mathcal{E})$ قطرية.
2. يقبل كثير الحدود $\chi_u(X)$ التفريق إلى جداء عوامل من الدرجة الأولى في $\mathbb{K}[X]$ ، ويكون بُعد الفضاء الذاتي الموافق لأي قيمة ذاتية لـ u مساوياً رتبة مضاعفتها.

الإجابات

1. 2. ليكن $\mathcal{E} = (e_1, \dots, e_n)$ أساساً لـ E بحيث تكون المصفوفة $\text{mat}(u, \mathcal{E}, \mathcal{E})$ قطرية. ولرمز بالرموز $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ إلى العناصر المختلفة في قطر المصفوفة M . ولنفترض أن λ_i مكررة m_i مرة. عندئذ يكون لدينا، من جهة أولى،

$$\chi_u(X) = \prod_{i=1}^p (\lambda_i - X)^{m_i}$$

ومن ثم $\text{sp}(u) = \{\lambda_p, \dots, \lambda_1\}$.

من جهة ثانية، نلاحظ أن $\{j \in \mathbb{N}_n : u(e_j) = \lambda_i e_j\}$ ، إذن $m_i = \dim E_{\lambda_i}$ ، $i \in \mathbb{N}_p$. وبالإستفادة من النتيجة 1.1-VI. يكون $m_i \geq \dim E_{\lambda_i}$ أيًا كان $i \in \mathbb{N}_p$. وهذا يثبت أن $\dim E_{\lambda_i} = m_i$ ، $\forall i \in \mathbb{N}_p$. 2. 1. نعلم، استناداً إلى الفرض، أن

$$\chi_u(X) = \prod_{i=1}^p (\lambda_i - X)^{m_i}$$

حيث $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ عناصر مختلفة من \mathbb{K} ، تُكوّن في مجموعتها طيف التطبيق الخطي u . وأن $\dim E_{\lambda_i} = m_i$ ، $\forall i \in \mathbb{N}_p$ ، حيث $E_{\lambda_k} = \ker(u - \lambda_k I_E)$.

بناءً على المبرهنة 2.1-VI. يكون المجموع $F = \sum_{k=1}^p E_{\lambda_k}$ مجموعاً مباشراً، ومن ثم

$$\dim F = \sum_{k=1}^p \dim E_{\lambda_k} = \sum_{k=1}^p m_k = \deg \chi_u(X) = n = \dim E$$

إذن $F = E$ ، أو $E = \bigoplus_{k=1}^p E_{\lambda_k}$. فإذا اخترنا أساساً \mathcal{E}_k لكلٍ من الفضاءات الجزئية E_{λ_k} ، وعرفنا الأساس $\mathcal{E} = \mathcal{E}_1 \cup \mathcal{E}_2 \cup \dots \cup \mathcal{E}_p$ للفضاء الكلي E ، كانت المصفوفة $\text{mat}(u, \mathcal{E}, \mathcal{E})$ قطرية، وكَمَل الإجابات. □

نستنتج من المبرهنة السابقة النتيجة المهمة التالية:

2.2-VI. نتيجة: ليكن u تطبيقاً خطياً من $\mathcal{L}(E)$. إذا كان u يقبل n قيمة ذاتية مختلفة (نذكر أن $n = \dim E$)، أي $\text{card}(\text{sp}(u)) = n$ ، قَبِلَ u التمثيل بمصفوفة قطرية.

لنتقل إلى وجهة النظر المصفوفية.

3-2.VI. تعريف: لكن $M \ni M_n(\mathbb{K})$. نقول إنَّ المصفوفة M تشابه مصفوفة قطرية إذا وفقط إذا وُجِدَتْ مصفوفة قَلَوِيَّة $P \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ ، ووُجِدَتْ مصفوفة قطرية $D \in \mathcal{D}_n(\mathbb{K})$ ، بحيث

$$M = P D P^{-1}$$

يُكافئ ذلك قولنا إنَّ التطبيق الخطي

$$u_M : M_{n+1}(\mathbb{K}) \rightarrow M_{n+1}(\mathbb{K}), X \mapsto M X$$

يقبل التمثيل بمصفوفة قطرية، حيث نأخذ $P = \text{mat}(I_{M_{n+1}(\mathbb{K})}, \mathcal{E}, \mathcal{V})$ ، و \mathcal{E} هو الأساس القانوني للفضاء $M_{n+1}(\mathbb{K})$ ، و \mathcal{V} هو أساس $M_{n+1}(\mathbb{K})$ المكوَّن من الأشعة الذاتية لـ u_M . 4-2.VI. مثال: ليكن \mathbb{K} حقلاً تبديلياً عدده المميز لا يساوي 2. ولتأمل في $M_4(\mathbb{K})$ المصفوفة

$$M = \begin{bmatrix} a & b & c & d \\ b & a & d & c \\ c & d & a & b \\ d & c & b & a \end{bmatrix}$$

ولكن الأشعة v_4, v_3, v_2, v_1 من $M_{4 \times 1}(\mathbb{K})$ المعرفة كما يلي:

$$v_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad v_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

نلاحظ أنَّ

$$\begin{aligned} Mv_1 &= (a+b+c+d)v_1, & Mv_2 &= (a-b+c-d)v_2, \\ Mv_3 &= (a+b-c-d)v_3, & Mv_4 &= (a-b-c+d)v_4. \end{aligned}$$

فالأشعة v_4, v_3, v_2, v_1 أشعة ذاتية للتطبيق الخطي u_M وهي تُكوِّن أساساً \mathcal{V} للفضاء

$M_{4 \times 1}(\mathbb{K})$. وذلك لأنَّ المصفوفة

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

قَلَوِيَّة، إذ تُحقَّق $P^2 = 4I_4$.

وتكون مصفوفة u_M في الأساس \mathcal{V} ، مصفوفة قطرية، هي

$$D = \text{mat}(u, \mathcal{V}, \mathcal{V}) = \begin{bmatrix} a+b+c+d & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a-b+c-d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a+b-c-d & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a-b-c+d \end{bmatrix}$$

ونُحَقِّق

$$.M = P D P^{-1}$$

فالمصفوفة M تشابه مصفوفة قطرية. ويمكننا أن نحبس $X_M(X) = X_D(X)$ لنجد

$$\begin{aligned} X_M(X) &= (a+b+c+d-X)(a-b+c-d-X)(a+b-c-d-X)(a-b-c+d-X) \\ &= (X-a)^4 - 2(b^2+c^2+d^2)(X-a)^2 - 8bcd(X-a) + (b^2-c^2-d^2)^2 - 4c^2d \end{aligned}$$

3.VI . التطبيقات الخطية القابلة للتمثيل بمصفوفات مثلثية

1-3.VI. تعريف: ليكن u تطبيقاً خطياً من $\mathcal{L}(E)$. نقول إنَّ التطبيق الخطي u يقبل التمثيل بمصفوفة مثلثية، إذا وقفنا إذا وَجَدَ أساس \mathcal{E} للفضاء الشعاعي E بحيث تكون المصفوفة $\text{mat}(u, \mathcal{E}, \mathcal{E})$ مثلثية.

لنلاحظ أننا لم نحدد أ تكون المصفوفة $\text{mat}(u, \mathcal{E}, \mathcal{E})$ مثلثية عليا أم مثلثية سفلى، ذلك لأنه إذا كان $\mathcal{E} = (e_1, \dots, e_n)$ وعرفنا $\mathcal{E}' = (e_n, e_{n-1}, \dots, e_1)$ ، وكانت $\text{mat}(u, \mathcal{E}, \mathcal{E})$ مثلثية عليا (سفلى)، كانت المصفوفة $\text{mat}(u, \mathcal{E}', \mathcal{E}')$ مثلثية سفلى (عليا).

2-3.VI. مبرهنة: ليكن u تطبيقاً خطياً من $\mathcal{L}(E)$. عندئذ يقبل u التمثيل بمصفوفة مثلثية إذا وقفنا إذا كان كثير الحدود المميز $X_u(X)$ يقبل التفريق إلى جداء عوامل من الدرجة الأولى في $\mathbb{K}[X]$.

الإثبات

ليكن $\mathcal{E} = (e_1, \dots, e_n)$ أساساً لـ E بحيث تكون المصفوفة $\text{mat}(u, \mathcal{E}, \mathcal{E}) = (a_{ij})$ مثلثية عليا. عندئذ يكون

$$.X_u(X) = \prod_{i=1}^n (a_{ii} - X)$$

بالعكس، سنثبت بالتدريج على $\dim F = n$ ، أن كل تطبيق خطي من $\mathcal{L}(F)$ يقبل كثير حدوده المميز التفريق إلى جداء عوامل من الدرجة الأولى في $\mathbb{K}[X]$ ، يقبل التمثيل بمصفوفة مثلثية.

إن هذه القضية صحيحة حين يكون $n = 1$.

نفترض صحة هذه القضية، مهما يكن الفضاء شعاعي F الذي بعده أصغر تماماً من n . وليكن E فضاء شعاعياً بعده n . وليكن $u \in \mathcal{L}(E)$ بحيث يقبل كثير الحدود المميز $X_u(X)$ التفريق إلى جداء عوامل من الدرجة الأولى في $\mathbb{K}[X]$.

لتكن $\lambda \in \text{sp}(u)$ ، (إن $\text{sp}(u) \neq \emptyset$) لأن $X_u(X)$ يقبل التفريق إلى جداء عوامل من الدرجة الأولى في $\mathbb{K}[X]$ ، وليكن x شعاعاً ذاتياً لـ u موافقاً للقيمة الذاتية λ . أي إن x عنصر من $E_\lambda \setminus \{0\}$.

لنضع $e_1 = x$ ، ولننممه إلى أساس $\mathcal{E} = (e_1, \dots, e_n)$ لـ E . وليكن $p : E \rightarrow F$ الإسقاط الخطي لـ E على $F = \text{vect}((e_2, e_3, \dots, e_n))$ توازياً مع $G = \mathbb{K} \cdot e_1$ ، ولنعرف

$$s : F \rightarrow E, x \mapsto x$$

ولنضع أخيراً $v = p \circ u \circ s \in \mathcal{L}(F)$. فإذا كانت $M = \text{mat}(u, \mathcal{E}, \mathcal{E}) = (m_{ij})$ كان

$$\forall j \in \{2, \dots, n\} \quad p \circ u \circ s(e_j) = \sum_{i=2}^n m_{ij} \cdot e_j$$

وصار لدينا

$$\text{mat}(u, \mathcal{E}, \mathcal{E}) = \left[\begin{array}{c|ccc} \lambda & m_{12} & \dots & m_{1n} \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & & \\ 0 & \text{mat}(v, \mathcal{E}', \mathcal{E}') & & \end{array} \right]$$

حيث $\mathcal{E}' = (e_2, \dots, e_n)$ أساس لـ F .

من جهة أولى، لدينا $\dim F < n$ و $\mathcal{L}(F) \ni v$ ، ومن جهة ثانية لدينا

$$X_u(X) = (\lambda - X) X_v(X)$$

وهذا يقتضي أن $X_v(X)$ يقبل التفريق إلى جداء عوامل من الدرجة الأولى في $\mathbb{K}[X]$. يتجسم عن ذلك، استناداً إلى فرض التدريج، أنه يوجد أساس $\tilde{\mathcal{E}} = (\tilde{e}_2, \dots, \tilde{e}_n)$ لـ F بحيث تكون المصفوفة $\text{mat}(v, \tilde{\mathcal{E}}, \tilde{\mathcal{E}})$ مثلثية عليا. عندئذ تكون المصفوفة $\text{mat}(u, \mathcal{F}, \mathcal{F})$ حيث \mathcal{F} هو الأساس $\mathcal{F} = (e_1, \tilde{e}_2, \dots, \tilde{e}_n)$ لـ E ، مثلثية عليا أيضاً، ويكمل الإثبات. \square

نستنتج من المبرهنة السابقة النتيجة المهمة التالية:

3-3.VI. نتيجة: ليكن E فضاءً شعاعياً منتهي البعد على حقل الأعداد العقدية \mathbb{C} . عندئذ يقبل كل تطبيق خطي u من $\mathcal{L}(E)$ ، التمثيل بمصفوفة مثلثية.

الإثبات

هذه النتيجة صحيحة لأنه في $\mathcal{O}[X]$ يقبل كل كثير حدود غير ثابت التفريق إلى جداء عوامل من الدرجة الأولى. \square

4.VI. كثيرات الحدود والتطبيقات الخطية

ليكن u تطبيقاً خطياً من $\mathcal{L}(E)$ ، ولكن $k \in \mathbb{N}$. إذا كانت $k = 0$ اصطلاحاً أن $u^k = I_E$. وإذا كانت $0 < k$ عرفنا $u^k = \underbrace{u \circ u \circ \dots \circ u}_{k \text{ مرات}}$ $u^{k-1} = u \circ u^{k-1}$.

1-4.VI. مبرهنة: ليكن u تطبيقاً خطياً من $\mathcal{L}(E)$. إن التطبيق

$$\Psi : \mathbb{K}[X] \rightarrow \mathcal{L}(E), P \mapsto P(u)$$

الذي يربط بكثير الحدود $P = \sum_{k=0}^m a_k X^k$ من $\mathbb{K}[X]$ التطبيق الخطي $P(u) = \sum_{k=0}^m a_k u^k$

من $\mathcal{L}(E)$ ، هو تشاكل بين الجبرين $\mathbb{K}[X]$ و $\mathcal{L}(E)$.

الإثبات

يجب أن نثبت الخاصّة التالية:

$$\forall (\lambda, P, Q) \in \mathbb{K} \times \mathbb{K}[X] \times \mathbb{K}[X], \quad \forall u \in \mathcal{L}(E),$$

$$P(u) + Q(u) = (P + Q)(u)$$

$$\lambda \cdot P(u) = (\lambda P)(u)$$

$$P(u) \circ Q(u) = (P \cdot Q)(u)$$

وهذا تحقّق مباشرة تركه تقيماً للقارئ. \square

2-4.VI. مبرهنة: ليكن u تطبيقاً خطياً من $\mathcal{L}(E)$. وليكن كثير الحدود P و Q من $\mathbb{K}[X]$.
نفترض أنّ P و Q أوليان فيما بينهما. عندئذ يكون

$$\ker(PQ)(u) = \ker P(u) \oplus \ker Q(u)$$

الإثبات

استناداً إلى مبرهنة Bezout نعلم أنه يوجد S و T من $\mathbb{K}[X]$ بحيث

$$SP + TQ = 1$$

وهذه المساواة تقتضي أن يكون

$$(*) \quad S(u) \circ P(u) + T(u) \circ Q(u) = I_E$$

- لكن $x \in \ker P(u) \cap \ker Q(u)$ ، إذن بناءً على $(*)$ يكون

$$x = S(u)(P(u)(x)) + T(u)(Q(u)(x)) = 0$$

$$\text{و } \ker P(u) \cap \ker Q(u) = \{0\}$$

- ومن ناحية أخرى، لكن $x \in \ker(PQ)(u)$ ، نعرف $x_1 = T(u) \circ Q(u)(x)$ وكذلك

نعرف $x_2 = S(u) \circ P(u)(x)$. فيكون $x_1 \in \ker P(u)$ و $x_2 \in \ker Q(u)$ ، واستناداً إلى

$(*)$ يكون أيضاً $x = x_1 + x_2$. إذن $\ker(PQ)(u) = \ker P(u) + \ker Q(u)$. وهذا هو

المطلوب إثباته. \square

3-4.VI. نتيجة: ليكن u تطبيقاً خطياً من $\mathcal{L}(E)$. وليكن $(P_k)_{k \in \mathbb{N}_m}$ كثيرات حدود أولية

فيما بينها متني متني من $\mathbb{K}[X]$. وليكن $P = \prod_{k=1}^m P_k$. عندئذ يكون

$$\ker(P)(u) = \bigoplus_{k=1}^m \ker P_k(u)$$

الإثبات

هذه النتيجة تعميم مباشر للمبرهنة السابقة، ويجري إثباتها بالتدريج على العدد m . \square

4-4.VI. نتيجة: ليكن u تطبيقاً خطياً من $\mathcal{L}(E)$. هناك تكافؤ بين القصيتين التاليتين:

1. يقبل التطبيق الخطي u التمثيل بمصفوفة قطرية.

2. يوجد كثير حدود P من $\mathbb{K}[X]$ يقبل التفريق إلى جداء عوامل من الدرجة الأولى

مختلفة متني متني، بحيث $P(u) = 0$.

الإثبات

1. \Leftarrow 2. لَمَّا كَانَ التطبيق الخطي u يقبل التمثيل بمصفوفة قطرية، كان

$$E_\lambda = \ker(u - \lambda I_E) \quad \text{حيث} \quad E = \bigoplus_{\lambda \in \text{sp}(u)} E_\lambda$$

يكفي إذن أَنْ نَعْرِفَ $P = \prod_{\lambda \in \text{sp}(u)} (\lambda - X)$ ، ونَتَقَنَّ بسهولة أَنَّ P يُحَقِّقُ الشرط 2.

2. \Leftarrow 1. لنفترض أَنَّ $P = \prod_{k=1}^m (X - \mu_k)$ حيث تكون الأعداد μ_1, \dots, μ_m مختلفة معنى معنى.

لَمَّا كَانَ $P(u) = 0$ ، وَلَمَّا كَانَتْ كثيرات الحدود $(X - \mu_k)_{k \in \mathbb{N}_m}$ أولية فيما بينها معنى معنى، كان

$$E = \ker P(u) = \bigoplus_{k=1}^m \ker(u - \mu_k I_E)$$

وذلك بمقتضى النتيجة 3-4.VI. لنعرف إذن $J = \{k \in \mathbb{N}_m : \ker(u - \mu_k I_E) \neq \{0\}\}$ فيكون

$$E = \bigoplus_{k \in J} \ker(u - \mu_k I_E)$$

يكفي أَنْ نختار أساساً \mathcal{E} لـ E ، من الشكل $\bigcup_{k \in J} \mathcal{E}_k$ حيث يكون \mathcal{E}_k أساساً ما للفضاء

$\ker(u - \mu_k I_E)$ ، حتى تكون المصفوفة $\text{mat}(u, \mathcal{E}, \mathcal{E})$ قطرية، ومنه 1. \square

VI-4-5. نتيجة: ليكن u تطبيقاً خطياً من $\mathcal{L}(E)$ ، ولنفترض أَنَّهُ يوجد في $\mathbb{K}[X]$ كثير حدود

$$P(X) = \prod_{k=1}^m (X - \mu_k)^{n_k}$$

بحيث تكون الأعداد μ_1, \dots, μ_m مختلفة معنى معنى، ويكون $P(u) = 0$. عندئذ يكون

$$E = \bigoplus_{k=1}^m \ker(u - \mu_k)^{n_k}$$

الإثبات

تتجم هذه النتيجة مباشرة عن النتيجة 3-4.VI لأن كثيرات الحدود $(X - \mu_k)^{n_k}_{k \in \mathbb{N}_m}$

أولية فيما بينها معنى معنى. \square

6.4.VI. مبرهنة Cayley-Hamilton: ليكن u تطبيقاً خطياً من $\mathcal{L}(E)$. عندئذ يكون

$$X_u(u) = 0$$

الإثبات

ليكن x عنصراً غير معدوم من E . لَمَّا كَانَ بُعد الفضاء الشعاعي E منتهياً ويساوي n ، كانت الجملة $\{x, u(x), \dots, u^n(x)\}$ مرتبطة خطياً. يمكننا إذن أن نعرف $p = p_x$ أصغر عدد طبيعي k يجعل الجملة $\{x, u(x), \dots, u^k(x)\}$ مرتبطة. ونعرف أيضاً

$$F_x = \text{vect} \{ (x, u(x), \dots, u^{p-1}(x)) \}$$

إن اختيارنا للعدد p يجعل من الجملة $\{x, u(x), \dots, u^{p-1}(x)\}$ جملة حرة، فهي إذن أساس للفضاء الجزئي F_x ، نرسم إليه بالرمز \mathcal{F} . ولَمَّا كانت الجملة $\{x, u(x), \dots, u^p(x)\}$ مرتبطة، أمكننا أن نجد $(a_0, \dots, a_{p-1}) \in \mathbb{K}^p$ بحيث

$$(*) \quad u^p(x) = \sum_{k=0}^{p-1} a_k \cdot u^k(x)$$

تقتضي هذه المساواة أن الفضاء F_x يُحقّق الشرط $u(F_x) \subset F_x$ ، وإذا عرفنا التطبيق الخطي

$$v = u|_{F_x} : F_x \rightarrow F_x, y \mapsto u(y)$$

من $\mathcal{L}(F_x)$ ، صار لدينا بمقتضى المبرهنة 10-1.VI

$$(0) \quad X_u(X) = \mathcal{Q}(X) X_v(X)$$

ولكن

$$M_x = \text{mat}(v, \mathcal{F}, \mathcal{F}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & a_0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & a_1 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & a_{p-1} \end{bmatrix}$$

وبين حساب مباشر نترك تفاصيله للقارئ أن

$$X_v(X) = \det \left(M_x - X I_p \right) = (-1)^p \left(X^p - \sum_{k=0}^{p-1} a_k X^k \right)$$

ومن ثم يكون $X_v(u)(x) = (-1)^p (u^p(x) - \sum_{k=0}^{p-1} a_k u^k(x)) = 0$ استناداً إلى العلاقة (*).

وأخيراً نجد، بناءً على (0)، أن $X_u(u)(x) = \mathcal{Q}(u) \circ X_v(u)(x) = 0$ ويكتمل الإثبات بملاحظة

□

أن x عنصر ما من E .

5.VI. تطبيقات

5.VI.1. مبرهنة: لنكن A مصفوفة من $M_m(\mathcal{C})$. ولنفترض أنه يوجد كثير حدود $P \in \mathcal{C}[X]$

يكتب بالشكل $P(X) = \prod_{k=1}^n (\lambda_k - X)^{n_k}$ ، حيث $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ أعداد مختلفة معنى
معنى، ويُحقق $P(A) = 0$. عندئذ يكون

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad A^n \in \mathcal{Q}_n(A)$$

حيث \mathcal{Q}_n هو كثير الحدود الوحيد من $\mathcal{C}[X]$ ، الذي يُحقق الشروط:

$$\begin{aligned} & \deg \mathcal{Q}_n < \deg P \\ & \forall k \in \mathbb{N}_p, \quad \forall j \in \{0, 1, \dots, n_k - 1\} \quad (X^n)^{(j)}(\lambda_k) = (\mathcal{Q}_n)^{(j)}(\lambda_k) \end{aligned}$$

الإثبات

لنكن $\ell = \deg P = \sum_{k=1}^p n_k$ ولنعرّف المجموعة

$$\Delta = \{(j, k) : \mathbb{N}^2 : (1 \leq k \leq p) \wedge (0 \leq j < n_k)\}$$

فيكون $\text{card } \Delta = \ell$.

نمّ لتأمل التطبيق الخطي

$$\Phi : \mathcal{C}[X] \rightarrow \mathcal{C}^\Delta, \quad T(X) \mapsto (T^{(j)}(\lambda_k))_{(j,k) \in \Delta}$$

نلاحظ أولاً أن

$$\begin{aligned} T(X) \in \ker \Phi & \Leftrightarrow \forall (j, k) \in \Delta, \quad T^{(j)}(\lambda_k) = 0 \\ & \Leftrightarrow \forall k \in \mathbb{N}_p, \quad (\lambda_k - X)^{n_k} \mid T(X) \\ & \Leftrightarrow P(X) \mid T(X) \end{aligned}$$

إذن $\ker \Phi = \{S(X)P(X) : S \in \mathcal{C}[X]\}$

لنعرف $\mathcal{C}_{\ell-1}[X]$ بأنه الفضاء الشعاعي الجزئي من $\mathcal{C}[X]$ المؤلف من كثيرات الحدود العقدية

التي درجتها أصغر تماماً من ℓ ، فيكون $\dim \mathcal{C}_{\ell-1}[X] = \ell = \text{card } \Delta$. ولتأمل

$$\Psi = \Phi|_{\mathcal{C}_{\ell-1}[X]} : \mathcal{C}_{\ell-1}[X] \rightarrow \mathcal{C}^\Delta, \quad \Psi(T) = \Phi(T)$$

لما كان $\{0\} \subset \ker \Psi = \mathcal{C}_{\ell-1}[X] \cap \ker \Phi$ ، كان Ψ تطبيقاً خطياً متبايناً بين فضاءين

شعاعيين لهما البعد نفسه، لذا فهو تقابل خطي. وينتج بوجه خاص أن Φ غامر.

نستنتج من هذه الدراسة أنه، أيّاً كان $n \in \mathbb{N}$ ، يوجد كثير حدود وحيد $\mathcal{Q}_n \in \mathcal{C}_{\ell-1}[X]$

بحيث $\Psi(\mathcal{Q}_n) = \Phi(X^n)$. فشروط المبرهنة تعين \mathcal{Q}_n بطريقة وحيدة.

ومن ناحية أخرى، يُحقَّق كثير الحدود \mathcal{Q}_n العلاقة $\mathcal{Q}_n - \ker \Phi \ni X^n$ إذن يوجد كثير حدود $\mathcal{C}[X] \ni \mathcal{Q}_n$ بحيث $X^n = \mathcal{Q}_n(X) + S_n(X)P(X)$ ومنه

$$A^n = \mathcal{Q}_n(A) + S_n(A)P(A) = \mathcal{Q}_n(A)$$

لأن $P(A) = 0$ وهذا يُكَمِّلُ الإثبات. □

يمكننا أن نكون أكثر دقة في صياغة المبرهنة السابقة. لنحفظ برموز المبرهنة السابقة حيث أثبتنا أن

$$\Psi : \mathcal{C}_{\ell-1}[X] \rightarrow \mathcal{C}^\Delta, T(X) \mapsto (T^{(j)}(\lambda_k))_{(j,k) \in \Delta}$$

تقابل خطي. إذن، أيما كان $\Delta \ni (j_0, k_0)$ ، يوجد كثير حدود وحيد $\mathcal{C}_{\ell-1}[X] \ni P_{j_0, k_0}$ بحيث يكون $\Psi(P_{j_0, k_0}) = \delta_{j, j_0} \delta_{k, k_0} = e_{j_0, k_0}(j, k)$ حيث $\delta_{\alpha, \beta}$ هو رمز كرونكر المتعارف، أي

$$e_{j_0, k_0}(j, k) = \begin{cases} 1 & : (j_0, k_0) = (j, k) \\ 0 & : (j_0, k_0) \neq (j, k) \end{cases}$$

ولكنَّ الجملة $(e_{j_0, k_0})_{(j_0, k_0) \in \Delta}$ هي الأساس القانوني للفضاء الشعاعي \mathcal{C}^Δ ، إذن تكون الجملة $(P_{j_0, k_0})_{(j_0, k_0) \in \Delta}$ أساساً للفضاء الشعاعي $\mathcal{C}_{\ell-1}[X]$.

ليكن $\mathcal{Q} \in \mathcal{C}_{\ell-1}[X]$ إذن توجد جملة $(\beta_{j,k})_{(j,k) \in \Delta}$ من \mathcal{C}^Δ بحيث

$$\mathcal{Q} = \sum_{(j,k) \in \Delta} \beta_{j,k} \cdot P_{j,k}$$

ولتعيين الثوابت $(\beta_{j,k})_{(j,k) \in \Delta}$ ، نحسب من العلاقة السابقة $\mathcal{Q}^{(t)}(\lambda_s)$ حيث $\Delta \ni (t, s)$ فنجد أن $\mathcal{Q}^{(t)}(\lambda_s) = \beta_{t,s}$ إذن

$$\forall \mathcal{Q} \in \mathcal{C}_{\ell-1}[X], \quad \mathcal{Q} = \sum_{(j,k) \in \Delta} \mathcal{Q}^{(j)}(\lambda_k) \cdot P_{j,k}$$

وبوجه خاص يكون $\mathcal{Q}_n = \sum_{k=1}^p \sum_{j=0}^{n_k-1} \mathcal{U}_{j,k}(n) P_{j,k}$ حيث $\mathcal{U}_{j,k}(n) = (X^n)^{(j)}|_{X=\lambda_k}$ ، أو

$$\mathcal{U}_{j,k}(n) = \begin{cases} n(n-1)\dots(n-j+1)\lambda_k^{n-k} & : n > j \\ \text{td} & : n = j \\ 0 & : n < j \end{cases}$$

وأخيراً نجد $(\forall n \geq 0, \quad A^n = \sum_{k=1}^p \sum_{j=0}^{n_k-1} \mathcal{U}_{j,k}(n) \cdot P_{j,k}(A))$ (V)

حيث توضَّح العلاقة الهامة (V) تبعية A^n لـ n .

2-5.VI. نتيجة^[2]: لتكن A مصفوفة من $M_m(\mathbb{C})$. وليكن $\rho(A)$ نصف القطر الطيفي

للمصفوفة A ، أي $\rho(A) = \max \{ |\lambda| : \lambda \in \text{sp}(A) \}$. وليكن $\|\cdot\|$ نظيماً ما على

القضاء الشعاعي $M_m(\mathbb{C})$. عندئذ يوجد ثابت K موجب تماماً بحيث يكون

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad n \geq m \Rightarrow \|A^n\| \leq K n^{m-1} (\rho(A))^{n-m+1}$$

الإثبات

ليكن $P = \chi_A \in \mathcal{C}[X]$ كثير الحدود المميز للمصفوفة A . فهو يكتب بالشكل

$$P(X) = \prod_{k=1}^p (\lambda_k - X)^{n_k}$$

حيث $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ أعداد مختلفة متني متني تُكوّن طيف A ، ويكون $P(A) = 0$. استناداً

إلى المبرهنة 6-4.VI. ويكون من ثمّ

$$\forall n \geq m, \quad A^n = \sum_{k=1}^p \sum_{j=0}^{n_k-1} n(n-1)\dots(n-j+1) \cdot \lambda_k^{n-j} P_{j,k}(A)$$

وذلك باستخدام رموز المبرهنة السابقة. إذن، أياً كانت $0 < n$ ، فإنّ

$$\|A^n\| \leq \sum_{k=1}^p \sum_{j=0}^{n_k-1} n(n-1)\dots(n-j+1) \cdot (\rho(A))^{n-j} \|P_{j,k}(A)\|$$

$$\leq n^{m-1} \cdot (\rho(A))^{n-m+1} \cdot \sum_{k=1}^p \sum_{j=0}^{n_k-1} (\rho(A))^{m-1-j} \|P_{j,k}(A)\|$$

$$\square \quad K = \sum_{k=1}^p \sum_{j=0}^{n_k-1} (\rho(A))^{m-1-j} \|P_{j,k}(A)\| \text{ حيث } K \text{ وهو المطلوب إثباته.}$$

3-5.VI. نتيجة^[2]: لتكن A مصفوفة من $M_m(\mathbb{C})$. وليكن $\rho(A)$ نصف القطر الطيفي

للمصفوفة A ، أي $\rho(A) = \max \{ |\lambda| : \lambda \in \text{sp}(A) \}$. عندئذ تكون الخواص التالية

متكافئة

$$1. \quad \rho(A) < 1$$

$$2. \quad \text{إنّ المتسلسلة } (A^n)_{n \geq 0} \text{ متقاربة نحو } 0 \text{ في } M_m(\mathbb{C}).$$

$$3. \quad \text{إنّ المتسلسلة } \sum_{n=0}^{\infty} A^n \text{ متقاربة في } M_m(\mathbb{C}).$$

^[2] نفترض أنّ القارئ على دراية بالنسب الشعاعية المنتظمة، راجع كتاب التحليل ٢.

4-5.VI. مبرهنة: ليكن $(a_0, a_1, \dots, a_{m-1}) \in \mathcal{C}^m$ حيث $1 \leq m$ و $a_0 \neq 0$. إن الفضاء

الشعاعي الجزئي من $\mathcal{C}^{\mathbb{N}}$ المعروف كما يلي

$$\mathcal{E} = \{(u_n)_{n \in \mathbb{N}} : \forall n \geq m, \quad u_n = a_{m-1}u_{n-1} + \dots + a_1u_{n-m+1} + a_0u_{n-m}\}$$

هو فضاء شعاعي بُعد m . وإذا كان

$$X^m - \sum_{k=0}^{m-1} a_k X^k = \prod_{k=1}^p (X - \lambda_k)^{n_k}$$

حيث $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ أعداد مختلفة معنى معنى، كَوْنَتِ الجملة $(\mathcal{U}_{t,s})_{(t,s) \in \Delta}$ حيث

$$\Delta = \{(j, k) \in \mathbb{N}^2 : \{0 \leq j < n_k\} \wedge \{1 \leq k \leq p\}\}$$

و

$$\mathcal{U}_{t,s}(n) = \begin{cases} n(n-1)\dots(n-t+1)\lambda_s^{n-t} & : n > t \\ t! & : n = t \\ 0 & : n < t \end{cases}$$

أساساً للفضاء \mathcal{E} .

الإثبات

لنثبت أولاً أن $\mathcal{U}_{t,s} \in \mathcal{E}$ وذلك أيأ كانت $\Delta \ni (t, s)$. في الحقيقة، نلاحظ أن

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \mathcal{U}_{(t,s)}(n) = (X^n)^{(t)} \Big|_{X=\lambda_s}$$

ومنه، أيأ كانت $m \leq n$ ، نجد

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^m a_{m-k} \mathcal{U}_{t,s}(n-k) &= \sum_{k=1}^m a_{m-k} (X^{n-k})^{(t)} \Big|_{X=\lambda_s} = \left(\sum_{k=1}^m a_{m-k} X^{n-k} \right)^{(t)} \Big|_{X=\lambda_s} \\ &= (X^n - X^{n-m} \sum_{k=1}^m a_{m-k} X^{m-k})^{(t)} \Big|_{X=\lambda_s} \\ &= \left(X^n - X^{n-m} \left(X^m - \prod_{k=1}^p (X - \lambda_k)^{n_k} \right) \right)^{(t)} \Big|_{X=\lambda_s} \\ &= \left(X^n - X^{n-m} \prod_{k=1}^p (X - \lambda_k)^{n_k} \right)^{(t)} \Big|_{X=\lambda_s} = (X^n)^{(t)} \Big|_{X=\lambda_s} = \mathcal{U}_{t,s}(n) \end{aligned}$$

إذن الجملة $(\mathcal{U}_{t,s})_{(t,s) \in \Delta}$ هي جملة من عناصر \mathcal{E} .

من ناحية أخرى نرى بسهولة أنّ التطبيق الخطي

$$\Theta : E \rightarrow \mathcal{C}^m, (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \mapsto (u_0, u_1, \dots, u_{m-1})$$

تقابل، ومن ثمّ يكون $\dim \mathcal{E} = m = \text{card } \Delta$. يكفي إذن حتى يتمّ المطلوب أن نثبت أنّ الجملة $\{u_{t,s}\}_{(t,s) \in \Delta}$ تولّد الفضاء الشعاعي \mathcal{E} .

$$\text{لكن } (u_n)_{n \geq 0} \in \mathcal{E}, \text{ ولنعرف الشعاع } Z_n = \begin{bmatrix} u_{n-m} \\ \vdots \\ u_{n-2} \\ u_{n-1} \end{bmatrix} \text{ من } M_{m+1}(\mathcal{C}) \text{ حين تكون}$$

$n \geq m$. فنلاحظ أنّ $Z_{n+1} = A Z_n$ حيث

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \\ a_0 & a_1 & \dots & \dots & a_{m-1} \end{bmatrix} \in M_m(\mathcal{C})$$

ومنه، يكون $Z_{n+m} = A^n Z_m$ ، $\forall n \geq 0$.

ولكن بنشر المُحدّد $\chi_A(X)$ وفق العمود الأوّل وبالتدرّج على مرتبة هذا المُحدّد نجد

$$\chi_A(X) = (-1)^m \left(X^m - \sum_{k=0}^{m-1} a_k X^k \right) = \prod_{k=1}^p (\lambda_k - X)^{n_k}$$

وإذا استخدمنا العلاقة (V) بعد ملاحظة أنّ $\chi_A(A) = 0$ وجدنا

$$\forall n \geq 0, \quad A^n = \sum_{k=1}^p \sum_{j=0}^{n_k-1} u_{j,k}(n) \cdot P_{j,k}(A)$$

ومن ثمّ

$$\forall n \geq 0, \quad Z_{n+m} = \sum_{k=1}^p \sum_{j=0}^{n_k-1} u_{j,k}(n) \cdot P_{j,k}(A) Z_m$$

ولما كانت u_n هي المركبة الأولى للشعاع Z_{n+m} ، أمكننا بوضع $\beta_{j,k}$ للدلالة على المركبة

الأولى للشعاع $P_{j,k}(A) Z_m$ أن نكتب

$$\forall n \geq 0, \quad u_n = \sum_{k=1}^p \sum_{j=0}^{n_k-1} \beta_{j,k} \cdot u_{j,k}(n)$$

□

وبذلك نكون قد أثبتنا أنّ الجملة $\{u_{t,s}\}_{(t,s) \in \Delta}$ أساس للفضاء الشعاعي \mathcal{E} .

5.5.VI. مثال: لندرس المتاليات $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ و $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ و $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ المعرفة بالعلاقات :

$$2x_{n+1} = 5x_n - 5y_n + 2z_n$$

$$2y_{n+1} = 5x_n - 6y_n + 3z_n$$

$$2z_{n+1} = 6x_n - 9y_n + 5z_n$$

في الحقيقة، إذا عرفنا $T_n = \begin{bmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{bmatrix} \in M_{3 \times 1}(\mathbb{C})$ و $A = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 5 & -5 & 2 \\ 5 & -6 & 3 \\ 6 & -6 & 5 \end{bmatrix}$ ، وجدنا أن العلاقات

التدريجية التي تعرف المتاليات $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ و $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ و $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ تكافئ $T_{n+1} = AT_n$ وذلك أيًا كانت $0 \leq n$ ومن ثم

$$\forall n \geq 0, \quad T_n = A^n \cdot T_0$$

تقول المسألة إذن إلى حساب A^n ، لهذا علينا إيجاد كثير حدود P يُحقق $P(A) = 0$ ، والمرشح الوحيد أمامنا هو X_A كثير الحدود المميز للمصفوفة A . ونجد بالحساب المباشر

$$X_A(X) = -X^3 + 2X^2 - \frac{5}{4}X + \frac{1}{4} = (X-1)(X-\frac{1}{2})^2$$

لنبحث إذن عن كثير الحدود الوحيد $Q_n(X)$ الذي درجته أصغر أو تساوي 2 ويُحقق

$$Q_n(1) = 1, \quad Q_n(\frac{1}{2}) = (\frac{1}{2})^n, \quad Q'_n(\frac{1}{2}) = n(\frac{1}{2})^{n-1},$$

فنجد بالحل

$$Q_n(X) = (1 - (n+1)2^{-n})(2X-1)^2 + n2^{-n}(2X-1) + 2^{-n}$$

ولكن

$$2A - I_3 = \begin{bmatrix} 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \\ 6 & -9 & 4 \end{bmatrix}, \quad (2A - I_3)^2 = \begin{bmatrix} 3 & -3 & 1 \\ 3 & -3 & 1 \\ 3 & -3 & 1 \end{bmatrix}$$

إذن بالتعويض فيما سبق وباستخدام $A^n = Q_n(A)$ نجد

$$A^n = \begin{bmatrix} 3 & -3 & 1 \\ 3 & -3 & 1 \\ 3 & -3 & 1 \end{bmatrix} + \frac{n}{2^n} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & -4 & 2 \\ 3 & -6 & 3 \end{bmatrix} - \frac{1}{2^n} \begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 3 & -4 & 1 \\ 3 & -3 & 0 \end{bmatrix}$$

ومنه يكون، أيًا كانت $n \in \mathbb{N}$ ،

$$\begin{aligned}x_n &= 3x_0 - 3y_0 + z_0 - 2^{-n}(2x_0 - 3y_0 + z_0) + n2^{-n}(x_0 - 2y_0 + z_0) \\y_n &= 3x_0 - 3y_0 + z_0 - 2^{-n}(3x_0 - 4y_0 + z_0) + n2^{-n}(2x_0 - 4y_0 + 2z_0) \\z_n &= 3x_0 - 3y_0 + z_0 - 2^{-n}(3x_0 - 3y_0) + n2^{-n}(3x_0 - 6y_0 + 3z_0)\end{aligned}$$

ونلاحظ بوجه خاص أن المتتاليات الثلاث $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ و $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ و $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ متقاربة نحو النهاية نفسها، وهي $3x_0 - 3y_0 + z_0$.



تمارين

التمرين 1. احسب كثير الحدود المميز لكل من المصفوفات التالية:

$$M = \begin{bmatrix} 0 & b & \dots & b \\ a & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & 0 & b \\ a & \dots & a & 0 \end{bmatrix} \quad M = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & a_n \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & a_2 \\ a_n & \dots & a_2 & a_1^2 \end{bmatrix}$$

$$M = \begin{bmatrix} a^2 & ab & ab & b^2 \\ ab & a^2 & b^2 & ab \\ ab & b^2 & a^2 & ab \\ b^2 & ab & ab & a^2 \end{bmatrix} \quad M = \begin{bmatrix} 3 & -5 & 2 & -6 \\ 0 & 5 & 0 & 4 \\ -2 & 7 & -1 & 11 \\ 0 & -4 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

التمرين 2. لتكن المصفوفة $A = \begin{bmatrix} m & 1 & 1 \\ 1 & m & 1 \\ 1 & 1 & m \end{bmatrix}$. عيّن القيم الذاتية والأشعة الذاتية لـ A .

هل تشابه المصفوفة A مصفوفة قطرية؟ احسب A^n حين يكون $n \in \mathbb{N}$.

التمرين 3. أثبت تشابه المصفوفتين التاليتين:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

التمرين 4. ادرس اختزال المصفوفات التالية، أي بين إذا كانت تشابه مصفوفات قطرية وفي

حال الإيجاب عيّن مصفوفة الانتقال والمصفوفة القطرية الموافقة.

• المصفوفة $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{C})$ ، حيث

$$\forall (i, j) \in \mathbb{N}_n^2, a_{ij} = \alpha_i$$

• المصفوفة $B = (b_{ij}) \in M_n(\mathbb{C})$ ، حيث

$$\forall (i, j) \in \mathbb{N}_n^2, b_{ij} = \begin{cases} 1 & : i + j = n + 1 \\ 0 & : i + j \neq n + 1 \end{cases}$$

• المصفوفة $C = (c_{ij}) \in M_n(\mathbb{C})$ ، حيث

$$\forall (i, j) \in \mathbb{N}_n^2, c_{ij} = \begin{cases} c_i & : i + j = n + 1 \\ 0 & : i + j \neq n + 1 \end{cases} \text{ مع } c_i \in \mathbb{R}_+^*$$

• المصفوفة $(d_{ij}) = D$ حيث $M_n(\mathbb{C})$ ، حيث

$$\forall (i, j) \in \mathbb{N}_n^2, d_{ij} = \begin{cases} 1 & : (i-1)(j-1)(i-j) = 0 \\ 0 & : (i-1)(j-1)(i-j) \neq 0 \end{cases}$$

التمرين 5. حقل الدراسة هو \mathbb{C} . أوجد مصفوفة قطرية مشابهة للمصفوفة M في كسب من

الحالات التالية، واحسب M^n أيًا كانت $n \in \mathbb{N}$.

$$1^\circ. M = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad 2^\circ. M = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$3^\circ. M = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{bmatrix}, \quad 4^\circ. M = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

التمرين 6. لتكن M مصفوفة مربعة من المرتبة n على حقل \mathbb{K} . نفترض أن المصفوفة M تُكتب

$$M_{p \times q}(\mathbb{K}) \ni B, M_q(\mathbb{K}) \ni D, M_p(\mathbb{K}) \ni A \text{ حيث } M = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \text{ بالشكل}$$

$$\text{و } p+q=n \text{ مع } M_{q \times p}(\mathbb{K}) \ni C$$

$$1. \text{ أثبت أنه إذا كانت } A \text{ قَلْبِيَّةً فَإِنَّ } \det M = \det A \cdot \det(D - CA^{-1}B)$$

$$2. \text{ أثبت أنه إذا كانت } D \text{ قَلْبِيَّةً فَإِنَّ } \det M = \det D \cdot \det(A - BD^{-1}C)$$

$$3. \text{ ليكن } (p, n) \in \mathbb{N}^2 \text{ حيث } n \geq p \geq 1. \text{ ولتكن } M_{n \times p}(\mathbb{K}) \ni A \text{ و } M_{p \times n}(\mathbb{K}) \ni B$$

أثبت أن

$$\det(XI_n + AB) = X^{n-p} \det(XI_p + BA)$$

تطبيق - ليكن $(X, Y) \in (M_{n+1}(\mathbb{K}))^2$ ، نضع $M = X \cdot {}^t Y + Y \cdot {}^t X$. عَيِّن كثير الحدود المميز

$$M = (\cos(j-i)\theta)_{(i,j) \in \mathbb{N}_n^2} \text{ وادرس الحالة الخاصة}$$

$$- \text{ لتكن } A \in M_n(\mathbb{K}) \text{ و } B = \begin{bmatrix} 0 & I_n \\ A & 0 \end{bmatrix} \in M_{2n}(\mathbb{K}). \text{ أثبت أن}$$

$$X_B(X) = (-1)^n X_A(X^2)$$

التمرين 7. لتكن المصفوفة $A = \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$. نتأمل التطبيق الخطي $\Phi \ni \mathcal{L}(M_2(\mathbb{C})) \ni$ المعروف بـ $\Phi(M) = AM - MA$ حين يكون $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$. عيّن نواة Φ وأثبت أنه قابل للتشيل بمصفوفة قطرية.

التمرين 8. ليكن E فضاء التوابيع المستمرة على $[0,1]$ والتي تأخذ قيمها في \mathbb{R} . وليكن التطبيق الخطي $u: E \rightarrow E: f \mapsto u(f)$ بالمعلاقة

$$u(f)(x) = \int_0^1 \min(x, t) f(t) dt$$

عيّن القيم والأشعة الذاتية لـ u .

التمرين 9. ليكن a و b عددين حقيقيين مختلفين. وليكن $E = \mathbb{R}_n[X]$ فضاء كثيرات الحدود الحقيقية التي لا تزيد درجتها عن n . عيّن القيم الذاتية والأشعة الذاتية للتطبيق $\mathcal{L}(E) \ni u$ حيث

$$u(P)(X) = (X - a)(X - b)P'(X) - (nX - \frac{n}{2}(a + b))P(X)$$

التمرين 10. لتكن a و b و c أعداداً حقيقية مختلفة معنى. وليكن $E = \mathbb{R}_n[X]$ فضاء كثيرات الحدود الحقيقية التي لا تزيد درجتها عن n . ادرس قابلية تمثيل التطبيق $\mathcal{L}(E) \ni u$ بمصفوفة قطرية، حيث

$$u(P)(X) = \frac{d}{dX} ((aX + b)P(X)) + cP(X)$$

التمرين 11. لتكن A و M مصفوفتين من $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ تحققان $AM = MA$. نفترض أن القيم الذاتية لـ M متباينة معنى.

1. أثبت أن كل شعاع ذاتي لـ M هو شعاع ذاتي لـ A .

2. أثبت أنه يوجد $(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}) \in \mathbb{C}^n$ بحيث

$$A = \alpha_0 I_n + \alpha_1 M + \dots + \alpha_{n-1} M^{n-1}$$

3. حلّ في $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ المعادلة $X^2 = A$ حيث $A = \begin{bmatrix} 11 & -5 & 5 \\ -5 & 3 & -3 \\ 5 & -3 & 3 \end{bmatrix}$.

التمرين 12. لتكن M مصفوفة من $M_n(\mathbb{C})$. نفترض وجود عددين $(\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2$ و مصفوفتين $(A, B) \in (M_n(\mathbb{C}))^2$ بحيث يكون $M^k = \lambda^k A + \mu^k B$ أيًا كانت $k \in \{1, 2, 3\}$. أثبت أن M تشابه مصفوفة قطرية.

التمرين 13. لتكن M مصفوفة من $M_n(\mathbb{C})$ ، $(1 \leq n)$. أثبت تكافؤ الخواص التالية:

- كثير الحدود المميز لـ M يحقق $X_M(X) = (-1)^n X^n$.
- أيًا كان $0 < k$ فإن $\text{tr}(M^k) = 0$.
- يوجد عدد طبيعي p بحيث $M^p = 0$.

التمرين 14. نقول عن مصفوفة $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{C})$ إنها إحصائية إذا وفقط إذا تحقق

$$\forall (i, j) \in \mathbb{N}_n^2, a_{ij} \in [0, 1] \quad \text{و} \quad \forall i \in \mathbb{N}_n, \sum_{j=1}^n a_{ij} = 1$$

لتكن $M_n(\mathbb{C}) \ni (a_{ij}) = A$ مصفوفة إحصائية.

1. أثبت أن 1 قيمة ذاتية للمصفوفة A .
2. لتكن λ قيمة ذاتية لـ A في \mathbb{C} . أثبت أن $|\lambda| \geq 1$.
3. نفترض أن $0 < a_{ii}$ أيًا كان $i \in \mathbb{N}_n$. أثبت أن جميع القيم الذاتية لـ A (في \mathbb{C}) تقع داخل دائرة نصف قطرها أصغر تمامًا من 1 وتمس داخليًا الدائرة المثلثية.

التمرين 15.

ليكن كثير الحدود $P(X) = \sum_{k=0}^n a_{n-k} X^k$ من الدرجة n في $\mathbb{C}[X]$. نفترض أن

$$P(X) = \prod_{i=1}^n (X - \lambda_i)$$

و نضع $S_k = \sum_{i=1}^n \lambda_i^k$ حين يكون $k = 0, 1, \dots, n$.

1. أثبت المطابقة: $\frac{P'(X)}{P(X)} = \sum_{k=0}^n \frac{S_k}{X^{k+1}} + \frac{1}{X^{n+1}} \sum_{i=1}^n \frac{\lambda_i^{n+1}}{X - \lambda_i}$.
2. استنتج أنه في جوار $-\infty$ لدينا $O\left(\frac{1}{x}\right) + x^{\ell-1} \left(\sum_{i=1}^{n-\ell} a_{n-i} \prod_{i=1}^{\ell-1} S_i \right)$.
3. أثبت أخيرًا أن $1 = a_n$ وأن $a_k = -\frac{1}{k} \sum_{i=1}^k a_{k-i} S_i$ حين يكون $k \in \mathbb{N}_n$.

4. لتكن $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. نعرّف المتاليتين $(B_k)_{1 \leq k \leq n}$ و $(a_k)_{1 \leq k \leq n}$ بالعلاقات:

$$(A, -\text{tr}(B_1)) = (B_1, a_1) \quad \diamond$$

$$(A(B_{k-1} + a_{k-1}I_n), -\text{tr}(B_k)/k) = (B_k, a_k) \quad \diamond$$

حيث يكون $n \geq k > 1$. ألبت أنّ

$$\chi_A(X) = (-1)^n \left(X^n + \sum_{k=1}^{n-1} a_{n-k} X^k \right)$$

التمرين 16. لتكن $x \in]-1, +1[$ و $n \in \mathbb{N}$. ولنعرف

$$I_n(x) = \int_0^\pi \frac{\cos nt}{1 - x \cos t} dt$$

1. احسب كلاً من $I_0(x)$ و $I_1(x)$.

2. نفترض أنّ $x \neq 0$ ، وأنّ $1 \leq n$ ، احسب $I_{n+1}(x) + I_{n-1}(x)$ بدلالة $I_n(x)$ و x .

3. استنتج قيمة $I_n(x)$.



الفصل السابع

الفضاءات الشعاعية المزودة بجداء سلمي

يمثل الحقل \mathbb{K} في هذا الفصل حقل الأعداد الحقيقية \mathbb{R} ،
أو حقل الأعداد العقدية \mathbb{C} .

1.VII. الجداء السلمي

1-1.VII. تعريف: ليكن E فضاءً شعاعياً على الحقل \mathbb{K} . نسمي جداءً سلمياً على E كل تطبيق

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : E \times E \rightarrow \mathbb{K}, \{x, y\} \mapsto \langle x, y \rangle$$

يُحقق الخواص التالية:

S_1 • أياً كانت $x \in E$ ، يُكُن التطبيق $R_x : E \rightarrow \mathbb{K}, y \mapsto \langle x, y \rangle$ شكلاً خطياً.
 S_2 • أياً كانت $x, y \in E^2$ ، يُكُن $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$ ، ونعبر عن هذه الخاصية بقولنا
 في حالة $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ إن الجداء السلمي هرمي. أمّا في حالة $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ فيكتب هذا
 الشرط $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$ ، $\forall (x, y) \in E^2$ ، ونعبر عنه بقولنا إن الجداء السلمي
 متناظر.

S_3 • أياً كانت $x \in E$ ، يُكُن $\langle x, x \rangle \in \mathbb{R}_+$ ، ونقول إن الجداء السلمي موجب.
 S_4 • أياً كانت $x \in E \setminus \{0\}$ ، يُكُن $\langle x, x \rangle \neq 0$ ، ونقول إن الجداء السلمي معرف.

ونسمي فضاء جداء سلمي كل فضاء شعاعي E مزود بجداء سلمي، ونرمز إليه بالرمز
 $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle_E)$ ، أو $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ أو فقط E إذا لم يكن هنال مجال للالتباس.

وأخيراً نسمي فضاء إقليدياً كل فضاء جداء سلمي منتهي البعد على الحقل \mathbb{R} ، ونسمي
 فضاء هرميياً كل فضاء جداء سلمي منتهي البعد على الحقل \mathbb{C} .

2-1.VII. ملاحظة: ليكن E فضاءً جداءً سلمي، وليكن $E^3 \ni (x_1, x_2, z)$ ، و $E^2 \ni (\lambda, \mu)$ ، حيث يكون

$$\begin{aligned}\langle \lambda x_1 + \mu x_2, y \rangle &= \overline{\langle y, \lambda x_1 + \mu x_2 \rangle} \\ &= \lambda \cdot \overline{\langle y, x_1 \rangle} + \mu \cdot \overline{\langle y, x_2 \rangle} \\ &= \bar{\lambda} \cdot \langle x_1, y \rangle + \bar{\mu} \cdot \langle x_2, y \rangle\end{aligned}$$

فإذا كان $\mathbb{R} = \mathbb{K}$ ، كان الجداء السلمي شكلاً ثنائي الخطية. أما في حالة $\mathbb{C} = \mathbb{K}$ فنقول إن الجداء السلمي نصف خطي بالنسبة إلى المركبة الأولى.

3-1.VII. أمثلة:

♦ إذا كان $E = \mathbb{R}^n$ فإننا نسمي الجداء السلمي المألوف على E الجداء السلمي المعروف بالعلاقة

$$\langle x, y \rangle = \sum_{k=1}^n x_k \cdot y_k$$

حيث $x = (x_1, \dots, x_n)$ و $y = (y_1, \dots, y_n)$ من E .

♦ إذا كان $E = \mathbb{C}^n$ فإننا نسمي الجداء السلمي المألوف على E الجداء السلمي المعروف بالعلاقة

$$\langle x, y \rangle = \sum_{k=1}^n x_k \cdot \overline{y_k}$$

حيث $x = (x_1, \dots, x_n)$ و $y = (y_1, \dots, y_n)$ من E .

♦ إذا كان $E = C([0,1], \mathbb{C})$ أي فضاء التتابع المستمرة على $[0,1]$ والتي تأخذ قيمها في \mathbb{C} ، فيمكننا أن نزوّد هذا الفضاء بالجداء السلمي:

$$\forall (f, g) \in E^2, \quad \langle f, g \rangle = \int_0^1 f(t) \overline{g(t)} dt^*$$

♦ إذا كان $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ فضاءً جداءً سلمي، وكان $\mathcal{L}(E) \ni T$ تطبيقاً خطياً متبايناً، فإننا نعرف جداءً سلميًّا جديدًا على E بوضع $\langle T(x), T(y) \rangle = \langle x, y \rangle$.

* لكاملة تابع مستمر قيمه عقليه، لكامل جزاؤه الحقيقي والتخييلي كلاً على حده. فإذا كان u و v من

$$C([a, b], \mathbb{R}) \text{ كان بالتعريف } \int_a^b (u + iv) = \int_a^b u + i \int_a^b v$$

1.VII-4. تعريف: ليكن $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ فضاء جداء سلمي. نسمي التطبيق

$$Q_{\langle \cdot, \cdot \rangle} : E \rightarrow \mathbb{R}_+, x \mapsto \langle x, x \rangle = \|x\|^2$$

الشكل التربيعي الموافق للجداء السلمي $\langle \cdot, \cdot \rangle$. وكذلك نسمي التطبيق

$$\|\cdot\| : E \rightarrow \mathbb{R}_+, x \mapsto \|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$$

نظيم الجداء السلمي الموافق للجداء السلمي $\langle \cdot, \cdot \rangle$. وسنرى لاحقاً أنّ هذه التسمية

مبررة، إذ إنّ $\|\cdot\|$ فعلاً تنظيم^٤ على الفضاء الشعاعي E .

إن معرفة الشكل التربيعي الموافق لجداء سلمي كافية لتعيين هذا الجداء. هذا ما ستبينه

المبرهنة التالية:

1.VII-5. مبرهنة: -المطابقات القطيية- ليكن $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ فضاء جداء سلمي.

♦ في حالة $\mathbb{R} = \mathbb{K}$ ، لدينا

$$\begin{aligned} \forall (x, y) \in E \times E, \quad \langle x, y \rangle &= \frac{1}{2} (\|x + y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2) \\ &= \frac{1}{4} (\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2) \end{aligned}$$

♦ في حالة $\mathbb{C} = \mathbb{K}$ ، لدينا

$$\forall (x, y) \in E \times E, \quad \langle x, y \rangle = \frac{1}{4} \sum_{k=0}^3 i^k \cdot \|i^k x + y\|^2$$

الإثبات

• حالة $\mathbb{R} = \mathbb{K}$. لتكن $(x, y) \in E \times E$ ، ولتكن $\varepsilon \in \{+1, -1\}$ ، عندئذ يكون

$$\begin{aligned} \|x + \varepsilon y\|^2 &= \langle x + \varepsilon y, x + \varepsilon y \rangle = \langle x, x \rangle + \varepsilon \langle x, y \rangle + \varepsilon \langle y, x \rangle + \varepsilon^2 \langle y, y \rangle \\ &= \|x\|^2 + 2\varepsilon \langle x, y \rangle + \|y\|^2 \end{aligned}$$

حيث استغدنا من كون الجداء السلمي متناظراً في هذه الحالة ومن كون $\varepsilon^2 = 1$. وهذه المساواة

تقتضي مباشرة المطابقتين الواردين في نص المبرهنة.

• حالة $\mathbb{C} = \mathbb{K}$. لتكن $(x, y) \in E \times E$ ، ولتكن $\varepsilon \in \{+1, -1\}$ ، عندئذ يكون

$$\|x + \varepsilon y\|^2 = \|x\|^2 + \varepsilon \langle x, y \rangle + \varepsilon \langle y, x \rangle + \varepsilon^2 \|y\|^2 = \|x\|^2 + 2\varepsilon \operatorname{Re} \langle x, y \rangle + \|y\|^2$$

^٤ راجع الفصل السادس من كتاب التحليل ٢.

$$\operatorname{Re}\langle x, y \rangle = \frac{1}{4} (\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2) \quad \text{إذن نستنتج أن}$$

ومن جهة أخرى يكون

$$\operatorname{Im}\langle x, y \rangle = \operatorname{Re}(-i\langle x, y \rangle) = \operatorname{Re}\langle i x, y \rangle = \frac{1}{4} (\|ix + y\|^2 - \|ix - y\|^2)$$

وأخيراً

$$\begin{aligned} \langle x, y \rangle &= \operatorname{Re}\langle x, y \rangle + i \operatorname{Im}\langle x, y \rangle \\ &= \frac{1}{4} (\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2 + i\|ix + y\|^2 - i\|ix - y\|^2) \\ &= \frac{1}{4} (\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2 + i\|x + y\|^2 - i\|x - y\|^2) \end{aligned}$$

□ وهذه هي العلاقة المطلوبة.

6-1.VII. ملاحظة: ليكن $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ فضاء جداء سلمي على الحقل \mathcal{C} . ولكي $3 \leq n$. لنضع $\omega_n = \exp(\frac{2\pi i}{n})$ وهو جذر من المرتبة n للواحد. عندئذ تكون لدينا المطابقة القطبية التالية، التي نترك الباقيا تمريناً للقارئ، وهي تعميم لتلك الواردة في المبرهنة السابقة،

$$\forall (x, y) \in E \times E, \quad \langle x, y \rangle = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \omega_n^k \cdot \| \omega_n^k x + y \|^2$$

7-1.VII. مبرهنة: -مراجعة Schwartz- ليكن $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ فضاء جداء سلمي، عندئذ

$$\forall (x, y) \in E \times E, \quad |\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|$$

وتتحقق المساواة إذا وفقط إذا كانت الجملة (x, y) مرتبطة خطياً.

الإثبات

لتكن $(x, y) \in E \times E$. إذا كان $0 = y$ كانت النتيجة واضحة. لنفترض إذن أن

$0 \neq y$ ، ولنضع $\lambda = \langle y, x \rangle / \|y\|^2$. عندئذ يكون

$$0 \leq \|x - \lambda y\|^2 = \|x\|^2 + |\lambda|^2 \cdot \|y\|^2 - 2\operatorname{Re}\langle x, \lambda y \rangle = \|x\|^2 - \frac{|\langle x, y \rangle|^2}{\|y\|^2}$$

□ وهذا يثبت المراجعة المطلوبة، ويبيّن أن المساواة تتحقق فقط إذا كان $x = \lambda y$.

8-1.VII. ملاحظة: ينتج من مراجعة شوارتز السابقة أنه في حالة $\mathbb{R} = \mathbb{K}$ يكون لدينا

$$\frac{\langle x, y \rangle}{\|x\| \cdot \|y\|} \in [-1, +1] \quad \text{وذلك أيّاً كان الشعاعان غير المعدومين } x \text{ و } y \text{ وهذا ما يسمح بتعريف}$$

$$\angle(x, y) = \arccos \frac{\langle x, y \rangle}{\|x\| \cdot \|y\|} \quad \text{بأنها زاوية شعاعين غير معدومين } x \text{ و } y \text{ بأنها}$$

1.VII-9. مبرهنة: ليكن $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ فضاء جداء سلمي، عندئذ يكون $\|\cdot\|$ نظاماً على E .

الإثبات

- إذا كان $\|x\| = 0$ كان $x = 0$ لأن الجداء السلمي معرف.

- أيّاً كانت $x \in E$ ، وأياً كانت $\lambda \in \mathbb{K}$ ، فإن

$$\|\lambda \cdot x\| = \sqrt{\langle \lambda \cdot x, \lambda \cdot x \rangle} = \sqrt{\lambda \bar{\lambda} \cdot \langle x, x \rangle} = |\lambda| \sqrt{\langle x, x \rangle} = |\lambda| \cdot \|x\|$$

- وأخيراً أيّاً كانت $(x, y) \in E \times E$ ، فلدينا، استناداً إلى مراجعة شوارتز،

$$|\operatorname{Re}\langle x, y \rangle| \leq |\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|$$

ومن ثمّ

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\operatorname{Re}\langle x, y \rangle \leq \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\|x\| \cdot \|y\| = (\|x\| + \|y\|)^2$$

وهذا يُثبت مراجعة المثلث أي

$$\forall (x, y) \in E \times E, \quad \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

بذلك نكون قد أثبتنا أنّ $\|\cdot\|$ نظيم على E . \square

10-1.VII. ملاحظة: ليكن $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ فضاء جداء سلمي، ولتكن $(x, y) \in E \times E$. عندئذ

يكون لدينا التكافؤ التالي

$$\|x + y\| = \|x\| + \|y\| \Leftrightarrow \|y\| \cdot x = \|x\| \cdot y$$

في الحقيقة، يبيّن الإثبات السابق أنّ المساواة تتحقّق في مراجعة المثلث إذا وفقط إذا

كان $\operatorname{Re}\langle x, y \rangle \geq 0$ و $\operatorname{Im}\langle x, y \rangle = 0$ وكانت الجملة (x, y) مرتبطة خطياً. وتكافئ هذه

الشروط مجموعة كون $\|y\| \cdot x = \|x\| \cdot y$. \square

11-1.VII. مبرهنة: ليكن $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ فضاء جداء سلمي، ولتكن $(x, y) \in E \times E$. عندئذ

يكون لدينا المتطابقة التالية والتي تسمى متطابقة متوازي الأضلاع

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$$

الإثبات

لتكن $\varepsilon \in \{+1, -1\}$ ، لقد وجدنا سابقاً أنّ

$$\|x + \varepsilon y\|^2 = \|x\|^2 + 2\varepsilon \operatorname{Re}\langle x, y \rangle + \|y\|^2$$

ونحصل على المتطابقة المطلوبة بجمع العلاقتين السابقتين. \square

12-1.VII. ملاحظة: تميّز مطابقة متوازي الأضلاع فضاءات الجداء السلمي من بين الفضاءات الشعاعية المنظمة. أي إنه إذا كان $(E, \|\cdot\|)$ فضاءً شعاعياً منظماً، وكان نظيمه يُحقّق مطابقة متوازي الأضلاع، فيوجد جداء سلمي $\langle \cdot, \cdot \rangle$ على E بحيث يكون $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$ أيّاً كانت $E \ni x$.

13-1.VII. تعريف: ليكن $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ فضاء جداء سلمي، وليكن $\|\cdot\|$ التنظيم على E الموافق للجداء الداخلي. نقول إن $(E, \|\cdot\|)$ فضاءً هيلبرت Hilbert إذا وفقط إذا كان الفضاء الشعاعي المنظّم $(E, \|\cdot\|)$ فضاءً تاماً^٤.

14-1.VII. تعريف: لنذكر أولاً ببعض التعاريف الخاصة بالمصفوفات:

♦ إذا كانت $M \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ كانت المصفوفة $M \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$ هي منقول M .

وكانت \bar{M} هي المصفوفة المرافقة لـ M ، أي التي ثابتهما هي مرافقات ثوابت M . وأخيراً نستخدم الرمز M^* للدلالة على المصفوفة \bar{M}^t .

♦ لنكن $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

< نقول إن المصفوفة M متاطرة إذا وفقط إذا كان $M = M^*$.

< ونقول إن المصفوفة M هرميّة إذا وفقط إذا كان $M = M^*$ ، (هذا يكافئ كونها متاطرة في حالة $\mathbb{K} = \mathbb{R}$).

< نقول أيضاً إن المصفوفة M موجبة إذا وفقط إذا تحقّق الشرطان

$$1. M = M^*$$

$$2. \forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}), \quad X^* M X \in \mathbb{R}_+$$

(يمكن القارئ أن يثبت أنّ 2. \Leftrightarrow 1. في حالة $\mathbb{K} = \mathbb{R}$).

< وأخيراً نقول أيضاً إن المصفوفة M معرفة موجبة إذا وفقط إذا تحقّق الشرطان

$$1. M = M^*$$

$$2. \forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \setminus \{0\}, \quad X^* M X \in \mathbb{R}_+^*$$

^٤ راجع الفصل السادس من كتاب التحليل ٢.

15-1.VII. تعريف: ليكن $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ فضاء جدهاء سلمي، وليكن (x_1, \dots, x_m) جملة من أشعة الفضاء E . نسمي مصفوفة Gram للجملة (x_1, \dots, x_m) المصفوفة من $M_m(\mathbb{K})$ التي ثابت السطر ذي الدليل i والعمود ذي الدليل j فيها هو $\langle x_i, x_j \rangle$. ونرمز إلى هذه المصفوفة بالرمز $\text{Gram}(x_1, \dots, x_m)$.

16-1.VII. مبرهنة: ليكن $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ فضاء جدهاء سلمي، وليكن (x_1, \dots, x_m) جملة من أشعة الفضاء E . عندئذ تكون المصفوفة $\text{Gram}(x_1, \dots, x_m)$ موجبة، و تكون الشروط:

الثلاثة التالية متكافئة:

1. المصفوفة $\text{Gram}(x_1, \dots, x_m)$ معرفة موجبة.
2. المصفوفة $\text{Gram}(x_1, \dots, x_m)$ قلوبة.
3. الجملة (x_1, \dots, x_m) حرة.

الإثبات

نضع $\text{Gram}(x_1, \dots, x_m) = G = (g_{ij})$ ، حيث $g_{ij} = \langle x_i, x_j \rangle$. عندئذ، أياً كانت $(i, j) \in \mathbb{N}_m^2$ ، فإن

$$g_{ji} = \langle x_j, x_i \rangle = \overline{\langle x_i, x_j \rangle} = \overline{g_{ij}}$$

ومنه $G^* = G$.

من ناحية أخرى، ليكن $[\lambda_1, \dots, \lambda_m] = \Lambda$ ، نجد بحساب بسيط أن

$$\Lambda^* G \Lambda = \sum_{(i,j) \in \mathbb{N}_m^2} \overline{\lambda_i} \cdot \langle x_i, x_j \rangle \cdot \lambda_j = \left\| \sum_{i=1}^m \lambda_i \cdot x_i \right\|^2$$

فالمصفوفة G موجبة.

ونلاحظ من هذه المساواة، أنه توجد ثوابت $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ من \mathbb{K} ، ليست جميعها معدومة

بحيث يكون $\sum_{i=1}^m \lambda_i \cdot x_i = 0$ ، إذا فقط إذا، وجد شعاع غير معدوم $[\lambda_1, \dots, \lambda_m] = \Lambda$ بحيث

يكون $\Lambda^* G \Lambda = 0$. وهذا يثبت التكافؤ 1. \Leftrightarrow 3.

لإثبات الاقتضاء 1. \Leftarrow 2. نتأمل التطبيق الخطي

$$u_G : M_{m+1}(\mathbb{K}) \rightarrow M_{m+1}(\mathbb{K}), X \mapsto GX$$

إذا كانت $\Lambda \in \ker u_G$ ، كان $G\Lambda = 0$ ومن ثم $\Lambda^* G\Lambda = 0$ وهذا يقتضي، استناداً إلى 1، أن $\Lambda = 0$. فالتطبيق u_G متباين، وبناءً عليه يكون قلوباً ومن ثم تكون G قلوبية. وأخيراً، لنفرض أن الجملة (x_1, \dots, x_m) مرتبطة خطياً. عندئذ نجد $\Lambda = \{\lambda_1, \dots, \lambda_m\}$ ،

من $M_{m+1}(\mathbb{K})$ ، بحيث $\Lambda \neq 0$ و $\sum_{j=1}^m \lambda_j \cdot x_j = 0$. نستنتج إذن أن

$$\forall i \in \mathbb{N}_m, \quad 0 = \sum_{j=1}^m \lambda_j \cdot \langle x_i, x_j \rangle = \sum_{j=1}^m g_{i,j} \cdot \lambda_j$$

وهذا يكفي أن $G\Lambda = 0$ ولما كانت $\Lambda \neq 0$ ، كان $\ker u_G \neq \{0\}$ ، فالتطبيق u_G ليس قلوباً، ومن ثم المصفوفة G ليست قلوبية. \square

17-1.VII. تعريف: ليكن $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ فضاء جداء سلمي منتهي البعد وبُعدُه $n \in \mathbb{N}^*$ ، وليكن $\mathcal{E} = (e_1, \dots, e_n)$ أساساً للفضاء E . عندئذ تسمى المصفوفة $\text{Gram}(\mathcal{E})$ مصفوفة الجداء السلمي $\langle \cdot, \cdot \rangle$ في الأساس \mathcal{E} . وعندئذ أياً كان $X = [x_1, \dots, x_n]^t$ و أياً كان $Y = [y_1, \dots, y_n]^t$ من $M_{n+1}(\mathbb{K})$ تحقق العلاقة

$$\left\langle \sum_{k=1}^n x_k e_k, \sum_{k=1}^n y_k e_k \right\rangle = X^* G Y$$

تمرين: لتكن $M_n(\mathbb{R}) \ni H_n = (a_{i,j})$ المصفوفة المعروفة بالعلاقة $a_{i,j} = \frac{1}{i+j-1}$ ، والمعروفة باسم مصفوفة هيلبرت. إن H_n مصفوفة معرفة موجبة.

في الحقيقة، إذا كان $E = \mathbb{R}_{n-1}[X]$ أي فضاء كثيرات الحدود الحقيقية التي درجاتها أصغر تماماً من n ، وزودنا E بالجداء السلمي التالي

$$\forall (P, Q) \in E \times E, \quad \langle P, Q \rangle = \int_0^1 P(t) Q(t) dt$$

ثم أخذنا $\mathcal{E} = (1, X, \dots, X^{n-1})$ أساساً للفضاء E ، كان لدينا $H_n = \text{Gram}(\mathcal{E})$. وهذا ما يثبت أن H_n مصفوفة معرفة موجبة.

18-1.VII. مبرهنة: ليكن $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ فضاء جداء سلمي منتهي البعد وبُعدُه $n \in \mathbb{N}^*$ ، وليكن $\mathcal{E} = (e_1, \dots, e_n)$ و $\mathcal{F} = (f_1, \dots, f_n)$ أساسين للفضاء E . عندئذ يكون

$$\text{Gram}(\mathcal{E}) = P^* \text{Gram}(\mathcal{F}) P$$

$$P = P_{\mathcal{F}}^{\mathcal{E}} = \text{mat}(I_E, \mathcal{E}, \mathcal{F})$$

الإثبات

نضع $P = (p_{ij})$ ، فيكون عندئذ $f_k = \sum_{j=1}^n p_{kj} \cdot e_j$ ، $\forall j \in \mathbb{N}_n$ ، إذن، أيّا كانت

$$(l, j) \in \mathbb{N}_n^2$$
، يُكن

$$\langle e_l, e_j \rangle = \left\langle \sum_{k=1}^n p_{kl} f_k, \sum_{\ell=1}^n p_{\ell j} f_{\ell} \right\rangle = \sum_{(k, \ell) \in \mathbb{N}_n^2} \overline{p_{kl}} \langle f_k, f_{\ell} \rangle p_{\ell j} = [P^* \text{Gram}(\mathcal{F}) P]_{lj}$$

□

وهذه هي المساواة المطلوبة.

19 1.VII. نتيجة: ليكن $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ فضاء جداء سلمي منتهي البعد وبُعدُه $n \in \mathbb{N}^*$ ، وليكن $\mathcal{E} = (e_1, \dots, e_n)$ أساساً للفضاء E . عندئذ لا تتغير قيمة $\det \text{Gram}(e_1, \dots, e_n)$ إذا بادلنا بين أشعة الجملة \mathcal{E} ، أو إذا جمعنا إلى أحد الأشعة e_1, \dots, e_n عبارة خطية في بقية أشعة الجملة \mathcal{E} .

الإثبات

ليكن σ تبديلاً من S_n ، وليكن الأساس $\mathcal{F} = (e_{\sigma(1)}, \dots, e_{\sigma(n)})$. عندئذ يكون محدد المصفوفة $P = P_{\mathcal{F}}^{\mathcal{E}} = \text{mat}(I_E, \mathcal{E}, \mathcal{F})$ مساوياً توقيع التبديل σ أي: $\det P = \Delta(\sigma)$. ومنه يكون $\det P^* \cdot \det P = \Delta^2(\sigma) = 1$ ، واستناداً إلى المبرهنة السابقة يكون $\det \text{Gram}(\mathcal{E}) = \det \text{Gram}(\mathcal{F})$.

من ناحية أخرى، إذا تأملنا الأساس $\mathcal{F} = (\tilde{e}_1, e_2, \dots, e_n)$ حيث $\tilde{e}_1 = e_1 - \sum_{k=2}^n \lambda_k e_k$ ، كان

لدينا

$$P = P_{\mathcal{F}}^{\mathcal{E}} = \text{mat}(I_E, \mathcal{E}, \mathcal{F}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ \lambda_2 & 1 & & \\ \vdots & 0 & \ddots & \\ \vdots & \vdots & & 1 & 0 \\ \lambda_n & 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

□

ومنه $\det P = 1$ ، وهذا ما يثبت أن $\det \text{Gram}(\mathcal{E}) = \det \text{Gram}(\mathcal{F})$.

2.VII. المتعامد في فضاءات الجداء السلمي

2.VII.1. تعريف: ليكن $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ فضاء جداء سلمي.

♦ نقول عن عنصرين x و y من E إنهما متعامدان، ونكتب $x \perp y$ ، إذا وفقط إذا كان $\langle x, y \rangle = 0$.

♦ ونقول عن جماعة أشعة $(x_\alpha)_{\alpha \in A}$ من E إنها متعامدة إذا وفقط إذا كان

$$\forall (\alpha, \beta) \in A \times A, \quad \alpha \neq \beta \Rightarrow \langle x_\alpha, x_\beta \rangle = 0$$

♦ ونقول عن جماعة أشعة $(x_\alpha)_{\alpha \in A}$ من E إنها متعامدة نظامية إذا وفقط إذا كان

$$\forall (\alpha, \beta) \in A \times A, \quad \langle x_\alpha, x_\beta \rangle = \delta_{\alpha, \beta} = \begin{cases} 1 & : \alpha = \beta \\ 0 & : \alpha \neq \beta \end{cases}$$

♦ لتكن B مجموعة جزئية غير خالية من E ، وليكن x عنصراً من E . نقول إن x

عمودي على B ، ونكتب $x \perp B$ ، إذا وفقط إذا كان $x \perp y$ $\forall y \in B$. ونرمز

بالرمز B^\perp إلى مجموعة العناصر x التي تنتمي إلى E والعمودية على B .

2.VII.2. مثال هام: ليكن $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ فضاء التوابع المستمرة على $[0, 2\pi]$ ، والتي تأخذ قيمها في \mathbb{C} ، مزوداً بالجداء السلمي:

$$\forall (f, g) \in E \times E, \quad \langle f, g \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \overline{g(t)} dt$$

ولتكن الجماعة $(e_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ ، حيث $e_k(x) = \exp(ikx)$. عندئذ تكون الجماعة $(e_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ جماعة متعامدة نظامية في E .

2.VII.3. مبرهنة: ليكن $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ فضاء جداء سلمي، ولتكن $(x_\alpha)_{\alpha \in A}$ جماعة متعامدة من الأشعة غير المعدومة في E . حينئذ تكون الجماعة $(x_\alpha)_{\alpha \in A}$ حرة.

الإثبات

في الحقيقة، إن مصفوفة Gram لكل جماعة جزئية منتهية من $(x_\alpha)_{\alpha \in A}$ قلبية (لأنها قطرية وثوابت قطرها غير معدومة). وهذا يُثبت أن كل جماعة جزئية منتهية من $(x_\alpha)_{\alpha \in A}$ تكون حرة، وهذا هو المطلوب إثباته. \square

2.VII-4. مبرهنة: ليكن $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ فضاء جداء سلمي، ولتكن $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ جملة حرة في E . حينئذ توجد جملة متعامدة نظامية وحيدة $(\beta_1, \dots, \beta_n)$ في E ، تُحقّق، أيّاً كان

$IN_n \ni k$ ، الشرطين التاليين:

1. $\text{vect}((\beta_1, \dots, \beta_k)) = \text{vect}((\alpha_1, \dots, \alpha_k))$
2. $\langle \alpha_k, \beta_k \rangle \in \mathbb{R}_+^*$.

الإثبات

سنبدأ أولاً بإثبات الوحدةانية. لنفرض وجود جملتين متعامدتين نظاميتين $(\beta_1, \dots, \beta_n)$ ،

و $(\gamma_1, \dots, \gamma_n)$ ، نُحقّقان، أيّاً كان $IN_n \ni k$ ، الشرطين التاليين:

1. $\text{vect}((\beta_1, \dots, \beta_k)) = \text{vect}((\alpha_1, \dots, \alpha_k)) = \text{vect}((\gamma_1, \dots, \gamma_k))$
2. $\langle \alpha_k, \gamma_k \rangle \in \mathbb{R}_+^*$ و $\langle \alpha_k, \beta_k \rangle \in \mathbb{R}_+^*$.

لتكن $IN_n \ni p$. لما كان $\beta_p \in \text{vect}((\gamma_1, \dots, \gamma_p))$ ، والجملة $(\gamma_1, \dots, \gamma_p)$ متعامدة نظامية كان

$$\beta_p = \sum_{j=1}^p \langle \gamma_j, \beta_p \rangle \gamma_j$$

ولكن إذا كان $p > j$ ، كان $\gamma_j \in \text{vect}((\beta_1, \dots, \beta_j)) = \text{vect}((\beta_1, \dots, \beta_p))$. وكان من ثم

$\beta_p \perp \gamma_j$ ، وهذا يسمح باختصار المجموع السابق ليصبح

$$\langle \gamma_p, \beta_p \rangle = t_p \text{ حيث } \beta_p = t_p \gamma_p$$

ونستنتج من الشرط 2. ومن العلاقة $\langle \alpha_p, \beta_p \rangle = t_p \langle \alpha_p, \gamma_p \rangle$ ، أنّ $t_p \in \mathbb{R}_+^*$. وأخيراً ينجم

عن كون الجملتين نظاميتين أنّ $t_p = \|\beta_p\| = t_p \|\gamma_p\| = 1$. وهذا يقتضي $\beta_p = \gamma_p$.

أمّا إثبات الوجود فسنعبره بالتدريج على عدد العناصر في الجملة أي n .

- حالة $n = 1$ بسيطة، إذ يكفي أن نأخذ $\alpha_1 = \beta_1 = \frac{1}{\|\alpha_1\|} \cdot \alpha_1$.

- لنفترض صحة النتيجة عند قيمة ما للعدد n . ولتكن $(\alpha_1, \dots, \alpha_{n+1})$ جملة حرة في E .

نجد استناداً إلى فرض التدريج جملة متعامدة نظامية $(\beta_1, \dots, \beta_n)$ في E ، تُحقّق، أيّاً كان

$IN_n \ni k$ ، الشرطين التاليين:

1. $\text{vect}((\beta_1, \dots, \beta_k)) = \text{vect}((\alpha_1, \dots, \alpha_k))$
2. $\langle \alpha_k, \beta_k \rangle \in \mathbb{R}_+^*$.

لنضع إذن بالتعريف

$$\tilde{\beta}_{n+1} = \alpha_{n+1} - \sum_{k=1}^n \langle \beta_k, \alpha_{n+1} \rangle \cdot \beta_k$$

ولنلاحظ ما يلي:

أولاً : إن $\tilde{\beta}_{n+1} \neq 0$ وذلك لأن الجملة $(\alpha_1, \dots, \alpha_{n+1})$ جملة حرة في E .

ثانياً : نجد بحساب بسيط ، أياً كان $p \in \mathbb{N}_n$ ،

$$\langle \beta_p, \tilde{\beta}_{n+1} \rangle = \langle \beta_p, \alpha_{n+1} \rangle - \sum_{k=1}^n \langle \beta_k, \alpha_{n+1} \rangle \cdot \langle \beta_p, \beta_k \rangle_{\tilde{\beta}_{p,k-1}} = \langle \beta_p, \alpha_{n+1} \rangle - \langle \beta_p, \alpha_{n+1} \rangle = 0$$

ومن ثم يكون $\tilde{\beta}_{n+1} \perp \beta_p \quad \forall p \in \mathbb{N}_n$.

لئلاً : باستخدام الخاصّة السابقة نجد أيضاً

$$\langle \tilde{\beta}_{n+1}, \tilde{\beta}_{n+1} \rangle = \langle \tilde{\beta}_{n+1}, \alpha_{n+1} \rangle - \sum_{k=1}^n \langle \beta_k, \alpha_{n+1} \rangle \cdot \langle \tilde{\beta}_{n+1}, \beta_k \rangle_{0,j} = \langle \tilde{\beta}_{n+1}, \alpha_{n+1} \rangle$$

ومنه يكون $\langle \alpha_{n+1}, \tilde{\beta}_{n+1} \rangle \in \mathbb{R}_+^*$.

رابعاً : إن المساواة $\text{vect}(\beta_1, \dots, \beta_n, \tilde{\beta}_{n+1}) = \text{vect}(\alpha_1, \dots, \alpha_{n+1})$ واضحة.

□

يكفي إذن حتى يتم المطلوب أن نضع $\beta_{n+1} = \frac{1}{\|\tilde{\beta}_{n+1}\|} \cdot \tilde{\beta}_{n+1}$.

5-2.VII. ملاحظة: ليكن $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ فضاء جداء سلمي، وليكن $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ جملة حرة في E .

وليكن $(\beta_1, \dots, \beta_n)$ الجملة المعامدة النظاميّة الوحيدة في E ، التي تُحقّق، أياً كان $k \in \mathbb{N}_n$ ، الشرطين التاليين:

$$1. \text{vect}(\beta_1, \dots, \beta_k) = \text{vect}(\alpha_1, \dots, \alpha_k)$$

$$2. \langle \alpha_k, \beta_k \rangle \in \mathbb{R}_+^*$$

تسمّى إجرائيّة إنشاء $(\beta_1, \dots, \beta_n)$ انطلاقاً من $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ إجرائيّة Gram-Schmidt.

نبرين: ليكن $E = \mathbb{R}[X]$ أي فضاء كثيرات الحدود الحقيقيّة، مزوداً بالجداء السلمي:

$$\forall (P, Q) \in E \times E, \quad \langle P, Q \rangle = \int_0^1 P(t)Q(t) dt$$

ترك للقارئ مهمّة تطبيق إجرائيّة Gram-Schmidt على الجملة $E = (1, X, X^2, X^3)$.

ينتج من المبرهنة النتيجة المهمّة التالية:

6-2.VII. نتيجة: ليكن $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ فضاء جداء سلمي منتهي البعد، عندئذ يوجد في E أساس

معامد نظامي.

7.2.VII. مبرهنة: ليكن $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ فضاء جداء سلمي منتهي البعد وبُعده $n \in \mathbb{N}^*$ ، ولكن

(x_1, \dots, x_m) جملة من عناصر E . عندئذ توجد مصفوفة $A \in M_{n \times m}(\mathbb{K})$ ، بحيث

$$\text{Gram}(x_1, \dots, x_m) = A^* A$$

الإثبات

ليكن $\mathcal{E} = (e_1, \dots, e_n)$ أساساً متعامداً نظامياً للفضاء E . عندئذ يكون

$$\forall j \in \mathbb{N}_m, \quad x_j = \sum_{k=1}^n \langle e_k, x_j \rangle \cdot e_k$$

ومن ثم، أيّا كان $(i, j) \in \mathbb{N}_m^2$ ، فإنّ

$$\begin{aligned} \langle x_i, x_j \rangle &= \sum_{l=1}^n \sum_{k=1}^n \overline{\langle e_k, x_i \rangle} \cdot \langle e_l, x_j \rangle \cdot \langle e_k, e_l \rangle \\ &= \sum_{k=1}^n \overline{\langle e_k, x_i \rangle} \cdot \langle e_k, x_j \rangle \end{aligned}$$

إذا عرفنا المصفوفة $A \in M_{n \times m}(\mathbb{K})$ بالعلاقة $a_{ij} = \langle e_i, x_j \rangle$ ، كان لدينا

$$\langle x_i, x_j \rangle = \sum_{k=1}^n \overline{a_{ki}} \cdot a_{kj} = [A^* A]_{ij}$$

□

وهذا ما يثبت أنّ $\text{Gram}(x_1, \dots, x_m) = A^* A$.

8.2.VII. مبرهنة: ليكن $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ فضاء جداء سلمي منتهي البعد وبُعده $n \in \mathbb{N}^*$ ، ولكن

(x_1, \dots, x_n) أساساً للفضاء E . عندئذ توجد مصفوفة وحيدة $A \in M_n(\mathbb{K})$ ، مثلثية

علياً وتوابت قطرها الأساسي^d موجبة تماماً، بحيث

$$\text{Gram}(x_1, \dots, x_n) = A^* A$$

ومن ناحية أخرى، يكون

$$\det \text{Gram}(x_1, \dots, x_n) \leq \prod_{k=1}^n \|x_k\|^2$$

حيث تتحقّق المساواة إذا وفقط إذا كانت الجملة (x_1, \dots, x_n) متعامدة.

^d القطر الأساسي لمصفوفة مربعة $M = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{K})$ هو الجملة $(a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn})$.

الإلإبات

لنثبت أولاً الوحدانية. لنفترض أنّ $A^* A = B^* B$ ، حيث A و B مصفوفتان مثلثيتان علويتان ثوابت قطريهما الأساسيان موجبة تماماً، عندئذ يكون $D = (B^*)^{-1} A^* = B A^{-1}$. فمن جهة أولى تكون $B A^{-1} = D$ مصفوفة مثلثية عليا، ومن جهة ثانية تكون المصفوفة $D = (B^*)^{-1} A^*$ مصفوفة مثلثية سفلى. فالمصفوفة D مصفوفة قطريّة، ثوابت قطرها موجبة تماماً. وأخيراً

$$D^2 = D D^* = B A^{-1} ((B^*)^{-1} A^*)^* = B A^{-1} A B^{-1} = I_n$$

نستنتج إذن أنّ $D = I_n$ ، ومن ثمّ $B = A$.

أمّا لإلإبات الوجود، فنستخدم إجرائيّة Gram-Schmidt لإيجاد أساس متعامد نظامي

$$E \text{ لـ } \mathcal{E} = (e_1, \dots, e_n) \text{ بحيث}$$

$$\forall k \in \mathbb{N}_n, \quad (\text{vect}((x_1, \dots, x_k)) = \text{vect}((e_1, \dots, e_k))) \wedge ((e_k, x_k) \in \mathbb{R}_+^*)$$

فإذا عرفنا كما في المبرهنة السابقة $M_n(\mathbb{K}) \ni A = (a_{ij})$ بحيث $a_{ij} = \langle e_i, x_j \rangle$ ، كان لدينا من جهة أولى $\text{Gram}(x_1, \dots, x_n) = A^* A$ ، ومن جهة ثانية :

$$\diamond \quad a_{kk} = \langle e_k, x_k \rangle \in \mathbb{R}_+^*, \quad \text{فإن } \mathbb{N}_n \ni k \quad \diamond$$

$$\diamond \quad \text{وأبداً كانت } \mathbb{N}_n^2 \ni (i, j) \text{ بحيث } i > j, \text{ كان } x_j \in \text{vect}((e_1, \dots, e_j)) \text{، ومن}$$

$$\text{ثم } a_{ij} = \langle e_i, x_j \rangle = 0 \text{ إذن } e_i \perp x_j$$

هذا يثبت أنّ المصفوفة A مصفوفة مثلثيّة عليا ثوابت قطرها الأساسي موجبة تماماً.

من ناحية أخرى لدينا

$$\det A = \prod_{k=1}^n a_{kk} = \prod_{k=1}^n \langle e_k, x_k \rangle \leq \prod_{k=1}^n \|e_k\| \cdot \|x_k\| = \prod_{k=1}^n \|x_k\|$$

$$\text{إذن، } \det \text{Gram}(x_1, \dots, x_n) = |\det A|^2 \leq \prod_{k=1}^n \|x_k\|^2$$

ونرى أنّ المساواة تتحقّق في المراجعة السابقة إذا وفقط إذا كان

$$\forall k \in \mathbb{N}_n, \quad \langle e_k, x_k \rangle = \|e_k\| \cdot \|x_k\|$$

وهذا يُكافئ الشرط

$$\forall k \in \mathbb{N}_n, \quad x_k = \|x_k\| \cdot e_k$$

□

أي إنّ الجملة (x_1, \dots, x_n) متعامدة.

9-2.VII. نتيجة: ليكن $(F, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ فضاء جداء سلمي، ولتكن (x_1, \dots, x_m) جملة من عناصر الفضاء F . عندئذ يكون

$$\det \text{Gram}(x_1, \dots, x_m) \leq \prod_{k=1}^m \|x_k\|^2$$

حيث تتحقق المساواة إذا فقط إذا كانت الجملة (x_1, \dots, x_m) متعامدة، أو إذا انعدم أحد أشعتها.

الإثبات

إذا كانت الجملة (x_1, \dots, x_m) مرتبطة، كانت المتراجحة صحيحة وضوحاً، لأن طرفها الأيسر معدوم في هذه الحالة، وتتحقق عندها المساواة إذا فقط إذا انعدم أحد أشعة الجملة. أما إذا كانت الجملة (x_1, \dots, x_m) حرة، فإننا نحصل على المطلوب بتطبيق البرهنة السابقة على الفضاء $E = \text{vect}((x_1, \dots, x_m))$. \square

10-2.VII. نتيجة: - تفريق Cholesky- ليكن $M \in M_n(\mathbb{K})$ مصفوفة معرفة موجبة. عندئذ توجد مصفوفة مثلية عليا وحيدة $A \in M_n(\mathbb{K})$ ثوابت قطرها الأساسي موجبة تماماً بحيث $M = A^* A$.

الإثبات

لرود الفضاء الشعاعي $E = M_{n+1}(\mathbb{K})$ ، بالجداء السلمي المعروف كما يلي

$$\forall (X, Y) \in E \times E, \quad \langle\langle X, Y \rangle\rangle = X^* M Y$$

وليكن $\mathcal{E} = (e_1, \dots, e_n)$ الأساس القانوني في E . عندئذ يكون $M = \text{Gram}_{\langle\langle \cdot, \cdot \rangle\rangle}(\mathcal{E})$ ونحصل على المطلوب استناداً إلى البرهنة 8-2.VII. \square

11-2.VII. ملاحظة: إن عكس البرهنة السابقة صحيح أيضاً. فإذا كانت $M = A^* A$ حيث $A \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ ، كانت المصفوفة M معرفة موجبة. وذلك لأنه من جهة أولى يكون

$$M^* = A^*(A^*)^* = A^* A = M$$

ومن جهة ثانية،

$$\forall X \in M_{n+1}(\mathbb{K}), \quad X^* M X = \|AX\|^2$$

حيث $\|\cdot\|$ هو التنظيم المرافق للجداء السلمي المألوف على $M_{n+1}(\mathbb{K})$.

12-2.VII. نتيجة: - مترابطة Hadamard- ليكن $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{K})$. عندئذ يكون

$$|\det A| \leq \prod_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^n |a_{ij}|^2 \right)^{1/2}$$

الإثبات

يمكننا أن نفترض أن المصفوفة A قلبية، وإلا كانت المترابطة واضحة.

لزوّد الفضاء الشعاعي $E = M_{n,1}(\mathbb{K})$ ، بالجداء السلمي المعرف كما يلي

$$\forall (X, Y) \in E \times E, \quad \langle\langle X, Y \rangle\rangle = X^* A^* A Y = \langle AX, AX \rangle$$

حيث $\langle \cdot, \cdot \rangle$ هو الجداء السلمي المألوف على E . وليكن $\mathcal{E} = \{e_1, \dots, e_n\}$ الأساس القانوني

في E . عندئذ يكون $\langle\langle e_j, e_j \rangle\rangle \in \mathcal{E}$ و $A^* A = \text{Gram}(\langle\langle \cdot \rangle\rangle)$ ، و استناداً إلى النتيجة 9-2.VII. يكون

$$|\det(A^* A)| \leq \prod_{j=1}^n \langle\langle e_j, e_j \rangle\rangle$$

$$\square \quad |\det A| \leq \prod_{j=1}^n \sqrt{\langle Ae_j, Ae_j \rangle} = \prod_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^n |a_{ij}|^2 \right)^{1/2} \quad \text{أو}$$

3.VII. الإسقاط القائم

1-3.VII. مبرهنة: ليكن $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ فضاء جداء سلمي، وليكن F فضاء شعاعياً جزئياً من

E ، وأخيراً لتكن $E \ni \beta$.

1. يكون عنصر $F \ni \alpha$ أفضل تقريب لـ β بعنصر من F ، (أي يُحقّق

$$\| \beta - \alpha \| = d(\beta, F) \quad \text{أو} \quad \forall \gamma \in F, \quad \| \beta - \alpha \| \leq \| \beta - \gamma \|$$

إذا وفقط إذا كان $\beta - \alpha \perp F$.

2. إذا وُجدَ $F \ni \alpha$ أفضل تقريب لـ β بعنصر من F ، كان هذا العنصر وحيداً.

3. لنفترض أن بُعد F متناه، وليكن $\mathcal{E} = \{e_1, \dots, e_n\}$ أساساً متعامداً نظامياً لـ F .

عندئذ يكون $\alpha = \sum_{k=1}^n \langle e_k, \beta \rangle e_k$ هو أفضل تقريب لـ β بعنصر من F .

4. إذا كان الفضاء F فضاء هيلبرت، وُجدَ عنصر $F \ni \alpha$ يكون أفضل تقريب لـ β

بعنصر من F .

الإثبات

سنعرض الإثبات في حالة $\mathcal{C} = \mathbb{IK}$ ، لأن حالة $\mathbb{IR} = \mathbb{IK}$ أبسط وترك تفاصيلها للقارئ.

1. ليكن $F \ni \gamma$. عندئذ يكون لدينا

$$(*) \quad \|\beta - \gamma\|^2 = \|\beta - \alpha\|^2 + \|\alpha - \gamma\|^2 + 2 \operatorname{Re}(\beta - \alpha, \alpha - \gamma)_{F \ni \gamma}$$

فإذا كان $\beta - \alpha \perp F$ كان $\langle \beta - \alpha, \alpha - \gamma \rangle = 0$ ، ومن ثم $\|\beta - \alpha\| \geq \|\beta - \gamma\|$. أي إن α هو أفضل تقرب لـ β بعنصر من F .

وبالعكس، إذا كان $\|\beta - \alpha\| \leq \|\beta - \gamma\|$ ، $\forall \gamma \in F$ ، كان لدينا، بناءً على (*)،

$$\forall \gamma \in F, \quad \|\alpha - \gamma\|^2 + 2 \operatorname{Re}(\beta - \alpha, \alpha - \gamma) \geq 0$$

$$\forall \delta \in F, \quad \|\delta\|^2 + 2 \operatorname{Re}(\beta - \alpha, \delta) \geq 0$$

أو
ومن ثم

$$\forall \delta \in F, \forall (r, t) \in \mathbb{R}^2, \quad r^2 \|\delta\|^2 + 2r \operatorname{Re}(\beta - \alpha, e^{it} \cdot \delta) \geq 0$$

وهذا يقتضي

$$\forall \delta \in F, \forall t \in \mathbb{R}, \quad \operatorname{Re}(e^{it} \cdot (\beta - \alpha, \delta)) = 0$$

وأخيراً، لأن t عدد كيفي، يكون

$$\forall \delta \in F, \quad \langle \beta - \alpha, \delta \rangle = 0$$

أو $\beta - \alpha \perp F$.

2. ليكن $F \ni \alpha$ أفضل تقرب لـ β بعنصر من F ، وليكن أيضاً $F \ni \alpha'$ أفضل تقرب

لـ β بعنصر من F . عندئذ يكون $\beta - \alpha \perp F$ و $\beta - \alpha' \perp F$ وذلك استناداً إلى ما سبق. ينتج

من ذلك أن $\alpha' - \alpha = (\beta - \alpha) - (\beta - \alpha') \perp F$ ، ومن ثم يكون

$$\|\alpha' - \alpha\|^2 = \langle \alpha' - \alpha, \alpha' - \alpha \rangle = 0$$

أو $\alpha = \alpha'$.

3. من الواضح أن $\alpha = \sum_{k=1}^n \langle e_k, \beta \rangle e_k$ عنصر من F . يكفي إذن أن نترقب أن $\beta - \alpha \perp F$.

ولتحقيق ذلك يكفي إثبات أن $\langle e_k, \beta - \alpha \rangle = 0$ أيًا كانت $k \in \mathbb{N}_n$. وهذا أمر ميسور نترك

تفاصيله البسيطة للقارئ.

4. لنعرّف $d = d(\beta, F) = \inf \{ \|\beta - \gamma\| : \gamma \in F \}$ ، وهي المسافة بين β والفضاء الجزئي F . عندئذ يوجد، أيّا كانت $n \in \mathbb{N}^*$ ، عنصر $\alpha_n \in F$ بحيث $\|\beta - \alpha_n\|^2 \leq d^2 + \frac{1}{n^2}$.
 لكن $(n, m) \in \mathbb{N}^{*2}$ ، بحيث $m < n$ ، عندئذ يمكننا أن نكتب، بناءً على مطابقة متوازي الأضلاع،

$$\begin{aligned} \|\alpha_n - \alpha_m\|^2 &= \|(\beta - \alpha_m) - (\beta - \alpha_n)\|^2 \\ &= 2\|\beta - \alpha_m\|^2 + 2\|\beta - \alpha_n\|^2 - \|2\beta - \alpha_n - \alpha_m\|^2 \\ &= 2\|\beta - \alpha_m\|^2 + 2\|\beta - \alpha_n\|^2 - 4\left\|\beta - \frac{1}{2}(\alpha_n + \alpha_m)\right\|^2 \end{aligned}$$

ولكن F فضاء شعاعي، إذن $\frac{1}{2}(\alpha_n + \alpha_m) \in F$ ، ومن ثمّ

$$\|\alpha_n - \alpha_m\|^2 \leq 2d^2 + \frac{2}{m^2} + 2d^2 + \frac{2}{n^2} - 4d^2 \leq \frac{4}{m^2}$$

وبذا نكون قد أثبتنا أنّ

$$\forall (n, m) \in \mathbb{N}^{*2}, \quad m < n \Rightarrow \|\alpha_n - \alpha_m\| \leq \frac{2}{m}$$

فالماتالية $(\alpha_n)_{n \geq 1}$ تُحقّق شرط كوشي في الفضاء التام F . ينجم عن ذلك أنّها متقاربة نحو عنصر $\alpha \in F$ ، ولما كان $\alpha = \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n$

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad d^2 \leq \|\beta - \alpha_n\|^2 \leq d^2 + \frac{1}{n^2}$$

أمكنا أن نستنتج، بحمل n تسعى إلى $+\infty$ ، أنّ $d = \|\beta - \alpha\|$. أي

$$\|\beta - \alpha\| = \inf \{ \|\beta - \gamma\| : \gamma \in F \}$$

□

وهذا يُكمل الإثبات.

2.3.VII تعريف : ليكن $(E, (\cdot, \cdot))$ فضاء جداء سلمي، وليكن F فضاء شعاعياً جزئياً من E ، وأخيراً لنكن $\alpha \in E$. إذا وُجدَ عنصر $\alpha \in F$ يكون أفضل تقريب لـ β بعنصر من F ، قلنا إنّ α هو المسقط القائم لـ β على F . قلنا أيضاً إنّ β يقبلُ مسقطاً قائماً على F .

3-3.VII. مبرهنة : ليكن $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ فضاء جداء سلمي، وليكن F فضاء شعاعياً جزئياً من

E ، نفترض أن كل عنصر من E يقبل مسقطاً قائماً على F . عندئذ

1. إن المجموعة F مجموعة مغلقة في E . (حيث E مزود بالنظام الموافق للجداء السلمي).

2. إذا رمزنا بالرمز P_F للتطبيق الذي منطلقه E ، ومستقره E ، ويربط بكل عنصر

من E مسقطه القائم على F . كان P_F إسقاطاً خطياً يُحقق

$$F^\perp = \ker P_F \quad \text{و} \quad F = \text{Im } P_F$$

ويكون من ثم $E = F \oplus F^\perp$.

3. يقبل كل عنصر E من مسقطاً قائماً على F^\perp . ويكون $P_{F^\perp} = I - P_F$.

الإثبات

1. لتأمل عنصراً x لاصقاً بـ F ، أي $x \in F$ ، ولتكن $\alpha \in F$ المسقط القائم لـ x على

F . عندئذ يكون $d(x, F) = d(x, \bar{F}) = 0$ ، وهذا يبين أن $F \ni \alpha = x$. إذن

$F = \bar{F}$ وهذه المجموعة مغلقة.

2. لتكن $(x, y) \in E^2$ ، ولتكن $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$. ولنعرف $z = \lambda P_F(x) + \mu P_F(y)$.

فيكون

$$\lambda x + \mu y - z = \lambda \underset{F^\perp}{x - P_F(x)} + \mu \underset{F^\perp}{y - P_F(y)}$$

إذن $\lambda x + \mu y - z \perp F$ أي إن z هو المسقط القائم لـ $\lambda x + \mu y$ على F ، أو

$$P_F(\lambda x + \mu y) = z = \lambda P_F(x) + \mu P_F(y)$$

نكون إذن قد أثبتنا أن P_F تطبيق خطي.

من ناحية أخرى، إذا كان $x \in F$ ، كان نفسه أفضل تقريب لـ x بعنصر من F ،

ومنه نجد $P_F(x) = x$ ، $\forall x \in F$ ، وهذا يقتضي أن $P_F \circ P_F = P_F$ ، وأن $F = \text{Im } P_F$.

وكذلك نلاحظ أن

$$x \in \ker P_F \Leftrightarrow P_F(x) = 0 \Leftrightarrow x - 0 \perp F \Leftrightarrow x \in F^\perp$$

أي $\ker P_F = F^\perp$. وأخيراً لما كان P_F إسقاطاً خطياً كان $E = \text{Im } P_F \oplus \ker P_F$.

3. ليكن $\beta \in E$ ، ولنضع $\alpha = \beta - P_F(\beta)$. عندئذ يكون $\alpha \in F^\perp$ ، و $\beta - \alpha \perp F^\perp$.

إذن α هو المسقط القائم لـ β على F^\perp . أي $P_{F^\perp}(\beta) = \beta - P_F(\beta)$. \square

VII.3-4. نتيجة : ليكن $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ فضاء جداء سلمي، وليكن F فضاء شعاعياً جزئياً من E . عندئذ نتحقق جميع نتائج المبرهنة السابقة إذا كان F فضاء هيلبرت. (لاحظ أن كل فضاء جداء سلمي منتهي البعد يكون فضاء هيلبرت). وفي الحالة التي يكون فيها F منتهي البعد، يمكننا أن نكتب

$$\forall x \in E, \quad P_F(x) = \sum_{k=1}^n \langle e_k, x \rangle e_k$$

حيث $\mathcal{E} = (e_1, \dots, e_n)$ أساس متعامد نظامي ما للفضاء F .

الإثبات

نتج هذه الخاصية مباشرة من المبرهنة VII.3-1. \square

VII.3-5. نتيجة : -مراجعة Bessel- ليكن $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ فضاء جداء سلمي، ولتكن (e_1, \dots, e_n) جملة متعامدة نظامية في E . عندئذ يكون

$$\forall x \in E, \quad \sum_{k=1}^n |\langle e_k, x \rangle|^2 \leq \|x\|^2$$

وتتحقق المساواة إذا فقط إذا كان $x \in \text{vect}((e_1, \dots, e_n))$.

الإثبات

لنضع $F = \text{vect}((e_1, \dots, e_n))$ ، ولتكن $x \in E$. لما كان الشعاعان $P_F(x)$ و $x - P_F(x)$ متعامدين، يمكننا أن نكتب

$$\|x\|^2 = \|P_F(x)\|^2 + \|x - P_F(x)\|^2$$

ومن ثم تكون لدينا المراجعة $\|x\|^2 \geq \|P_F(x)\|^2$ ، حيث نتحقق المساواة فيها إذا فقط إذا كان $x = P_F(x)$ أي $x \in \text{vect}((e_1, \dots, e_n))$. وأخيراً نلاحظ استناداً إلى النتيجة السابقة أن

$$\|P_F(x)\|^2 = \sum_{k=1}^n |\langle e_k, x \rangle|^2$$

\square

وبذلك نكون قد أثبتنا المطلوب.

6-3.VII. مثال : ليكن f تابعاً مستمراً على المجال $[0, 2\pi]$ ويأخذ قيمه في \mathbb{C} . ولنعرّف ثابت فورييه -Fourier- لـ f الموافق للدليل $n \in \mathbb{Z}$ ، بأنه $C_n(f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) e^{-int} dt$ ، عندئذ يكون

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \sum_{k=-n}^n |C_k(f)|^2 \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(t)|^2 dt$$

في الحقيقة، هذه هي متراجحة Bessel مطبقة على فضاء التوابيع المستمرة على $[0, 2\pi]$ ، والتي تأخذ قيمها في \mathbb{C} ، بعد تزويده بالجداء السلمي:

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \overline{f(t)} g(t) dt$$

وعلى الجملة المتعامدة النظامية $(e_k)_{-n \leq k \leq n}$ حيث $e_k(x) = \exp(ikx)$.

7-3.VII. مبرهنة : ليكن $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ فضاء جداء سلمي، وليكن F فضاءً شعاعياً جزئياً من E . وأخيراً ليكن (x_1, \dots, x_n) أساساً ما لـ F . عندئذ يكون

$$\forall x \in F, \quad d^2(x, F) = \frac{\det \text{Gram}(x, x_1, \dots, x_n)}{\det \text{Gram}(x_1, \dots, x_n)}$$

الإثبات

ليكن $x \in E$. نعلم بمقتضى النتيجة 18-1.VII. أن

$$\det \text{Gram}(x, x_1, \dots, x_n) = \det \text{Gram}(x - P_F(x), x_1, \dots, x_n)$$

وذلك لأن $P_F(x)$ هو عبارة خطية بالأشعة (x_1, \dots, x_n) . ولكن لما كان $x - P_F(x) \perp x_k$ ،

وذلك أيّاً كان $k \in \mathbb{N}_n$ ، أمكننا أن نكتب

$$\text{Gram}(x - P_F(x), x_1, \dots, x_n) = \left[\begin{array}{c|ccc} \|x - P_F(x)\|^2 & 0 & \dots & 0 \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & \text{Gram}(x_1, \dots, x_n) & \\ 0 & & & \end{array} \right]$$

ومنه

$$\det \text{Gram}(x, x_1, \dots, x_n) = \|x - P_F(x)\|^2 \det \text{Gram}(x_1, \dots, x_n)$$

□

ونحصل على المطلوب بملاحظة أن $d(x, F) = \|x - P_F(x)\|$.

8.3.VII مثال : ليكن $E = \mathbb{R}[X]$ ، ولزوّده بالجداء السّلمي

$$\forall (P, Q) \in E \times E, \quad \langle P, Q \rangle = \int_0^1 P(t)Q(t)dt$$

وليكن $F_n = \text{vect}(\{1, X, \dots, X^{n-1}\})$. المطلوب هو تعيين $d(X^m, F_n)$ حين يكون $m \geq n$.

لنضع $\mathcal{H} = \text{Gram}(1, X, \dots, X^{n-1}, X^m)$ فيكون

$$\mathcal{H} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \dots & \frac{1}{n} & \frac{1}{m+1} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \dots & \frac{1}{n+1} & \frac{1}{m+2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n+1} & \dots & \frac{1}{2n-1} & \frac{1}{m+n} \\ \frac{1}{m+1} & \frac{1}{m+2} & \dots & \frac{1}{m+n} & \frac{1}{2m+1} \end{bmatrix}$$

لحساب محدّد \mathcal{H} نطرح العمود الأخير من بقية الأعمدة فنجد

$$\det \mathcal{H} = \det \begin{bmatrix} \frac{m}{n+1} & \frac{m-1}{2(m+1)} & \dots & \frac{m-n+1}{n(m+1)} & \frac{1}{m+1} \\ \frac{m}{2(m+2)} & \frac{m-1}{3(m+2)} & \dots & \frac{m-n+1}{(n+1)(m+2)} & \frac{1}{m+2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \frac{m}{n(m+n)} & \frac{m-1}{(n+1)(m+n)} & \dots & \frac{m-n+1}{(2n-1)(m+n)} & \frac{1}{m+n} \\ \frac{m}{(m+1)(2m+1)} & \frac{m-1}{(m+2)(2m+1)} & \dots & \frac{m-n+1}{(m+n)(2m+1)} & \frac{1}{2m+1} \end{bmatrix}$$

ومنه

$$\det \mathcal{H} = \frac{(m!)^2}{(m-n)! \cdot (m+n)! \cdot (2m+1)} \det \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \dots & \frac{1}{n} & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \dots & \frac{1}{n+1} & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n+1} & \dots & \frac{1}{2n-1} & 1 \\ \frac{1}{m+1} & \frac{1}{m+2} & \dots & \frac{1}{m+n} & 1 \end{bmatrix}$$

وبأسلوب مائل نجد بعد طرح السطر الأخير من بقية الأسطر

$$\det \mathcal{H} = \frac{(m!)^4}{((m-n)!)^2 \cdot ((m+n)!)^2 \cdot (2m+1)} \det \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \dots & \frac{1}{n} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \dots & \frac{1}{n+1} & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n+1} & \dots & \frac{1}{2n-1} & 0 \\ \frac{1}{m+1} & \frac{1}{m+2} & \dots & \frac{1}{m+n} & 1 \end{bmatrix}$$

ونبشر هذا المحدّد وفق العمود الأخير نجد

$$\det \mathcal{H} = \frac{(m!)^4}{((m-n)!)^2 \cdot ((m+n)!)^2 \cdot (2m+1)} \det \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \cdots & \frac{1}{n} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \cdots & \frac{1}{n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n+1} & \cdots & \frac{1}{2n-1} \end{bmatrix}$$

ولما كان

$$\text{Gram}(1, X, \dots, X^{n-1}) = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \cdots & \frac{1}{n} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \cdots & \frac{1}{n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n+1} & \cdots & \frac{1}{2n-1} \end{bmatrix}$$

أمكنّا أن نكتب

$$d^2(X^m, F_n) = \frac{\det \text{Gram}(1, X, \dots, X^{n-1}, X^m)}{\det \text{Gram}(1, X, \dots, X^{n-1})} = \frac{(m!)^4}{((m-n)!)^2 \cdot ((m+n)!)^2 \cdot (2m+1)}$$

$$d(X^m, F_n) = \frac{(m!)^2}{(m-n)! \cdot (m+n)! \cdot \sqrt{2m+1}} \quad \text{ومنه}$$

أو

$$d(X^m, \text{vect}(\{1, X, \dots, X^{n-1}\})) = \begin{cases} 0 & : m < n \\ \frac{C_{2m}^{m-n}}{C_{2m}^m} \cdot \frac{1}{\sqrt{2m+1}} & : m \geq n \end{cases}$$

4.VII. الأشكال الخطية، والتطبيقات الخطية المرافقة

4.VII.1. مبرهنة: ليكن $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ فضاء جداء سلمي منتهي البعد. وليكن f شكلاً خطياًعلى E ، أي $f \ni E^*$. عندئذ يوجد عنصر وحيد $\beta \ni E$ بحيث يكون

$$\forall x \in E, \quad f(x) = \langle \beta, x \rangle$$

الإثبات

ليكن $\mathcal{E} = (e_1, \dots, e_n)$ أساساً متعامداً نظامياً لـ E . ولنفترض وجود عنصر $\beta \ni E$ يُحقّق المطلوب. عندئذ، أيّاً كان $x \ni E$ ، يُمكن

$$\langle \beta, x \rangle = f(x) = f\left(\sum_{k=1}^n \langle e_k, x \rangle e_k\right) = \sum_{k=1}^n \langle e_k, x \rangle f(e_k) = \left\langle \sum_{k=1}^n \overline{f(e_k)} \cdot e_k, x \right\rangle$$

ومن ثَم لا بد أن يكون $\beta = \sum_{k=1}^n \overline{f(e_k)} \cdot e_k$ وهذا ما يجب وحدانية β .

من ناحية أخرى، إذا تأملنا العنصر $\beta = \sum_{k=1}^n f(e_k) \cdot e_k$ ، وجدنا

$$\forall i \in \mathbb{N}_n, \quad f(e_i) = \langle \beta, e_i \rangle$$

□ وينتج من ذلك أنّ $f(x) = \langle \beta, x \rangle$ ، $\forall x \in E$ ، لكون الطرفين خطيين.

2-4.VII. ملاحظة: يمكن تعميم المبرهنة السابقة على النحو التالي: ليكن $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ فضاء هيلبرت. وليكن f شكلاً خطياً مستمراً على H . عندئذ يوجد عنصر وحيد $\beta \in H$ بحيث يكون $f(x) = \langle \beta, x \rangle$ ، $\forall x \in H$.

في الحقيقة، الوحدانية أمر بسيط نتركه للقارئ، لنثبت إذن الوجود. يمكننا أن نفترض أن $f \neq 0$ ، $F = \ker f$ ، $1 = f(\alpha)$ بحيث $\alpha \in H$ ، ولما كان f مستمراً، كان $F = \ker f$ فضاء شعاعياً جزئياً مطلقاً من H . يمكننا إذن أن نعرف الإسقاط القائم لـ H على F . ونعرف من ثم $\tilde{\beta} = \alpha - P_F(\alpha)$ ، فيكون $\tilde{\beta} \perp F$ و $1 = f(\tilde{\beta})$.

أخيراً، أيّا كانت $x \in H$ ، كان $x - f(x) \cdot \tilde{\beta}$ عنصراً من F ، ومن ثم

$$\langle \tilde{\beta}, x - f(x) \cdot \tilde{\beta} \rangle = 0$$

وهذا يكافئ، كون $f(x) = \langle \beta, x \rangle$ حيث $\beta = \frac{1}{\|\tilde{\beta}\|^2} \tilde{\beta}$. وهذا يثبت المطلوب.

3-4.VII. نتيجة: ليكن $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ فضاء جداء سلمي منتهي البعد، ولزوده بالنظيم الموافق للجداء السلمي. ولزود E^* فضاء الأشكال الخطية على E بنظم التطبيقات الخطية المستمرة من E إلى \mathbb{K} . عندئذ يكون التطبيق

$$\Phi: E \rightarrow E^*, \quad \beta \mapsto f_\beta$$

حيث $f_\beta(x) = \langle \beta, x \rangle$ ، $\forall x \in E$ ، تقابلاً نصف خطي^٤ محافظاً على النظم.

الإثبات

إن Φ تقابلاً بناءً على المبرهنة 1-4.VII.

من ناحية أخرى، ليكن $E^2 \ni (\alpha, \beta)$ و $E^2 \ni (t, s)$ ، و $E \ni x$ ، عندئذ

$$\begin{aligned} \Phi(t\alpha + s\beta)(x) &= \langle t\alpha + s\beta, x \rangle = \bar{t} \langle \alpha, x \rangle + \bar{s} \langle \beta, x \rangle = \bar{t} \Phi(\alpha)(x) + \bar{s} \Phi(\beta)(x) \\ &= (\bar{t} \Phi(\alpha) + \bar{s} \Phi(\beta))(x) \end{aligned}$$

^٤ أي $\forall (\alpha, \beta) \in E^2, \forall (t, s) \in \mathbb{K}^2, \quad \Phi(t\alpha + s\beta) = \bar{t} \cdot \Phi(\alpha) + \bar{s} \cdot \Phi(\beta)$

وأخيراً، أيّاً كان $E \ni \beta$ ، فلدينا

$$\|\Phi(\beta)\| = \|f_\beta\| = \sup \{ \langle \beta, x \rangle : \|x\| \leq 1 \} = \|\beta\|$$

□

وذلك بناءً على متراجحة شوارتز، وعلى حالة المساواة فيها.

VII.4-4. ملاحظة: يمكن تعميم النتيجة السابقة، باستخدام الإلانات نفسه والملاحظة VII.2-4.

على النحو التالي: ليكن $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ فضاء هيلبرت. وليكن H' فضاء الأشكال الخطية المستمرة على H ، مزوداً بتنظيم التطبيقات الخطية المستمرة. عندئذ يكون التطبيق

$$\Phi : H \rightarrow H', \beta \mapsto f_\beta$$

حيث $f_\beta(x) = \langle \beta, x \rangle$ ، $\forall x \in H$ ، تقابلاً نصف خطي محافظاً على التنظيم.

VII.4-5. مبرهنة وتعريف: ليكن $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle_E)$ و $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle_H)$ فضاءي جداء سلمي منتهيين

البعد على الحقل نفسه. وليكن u تطبيقاً خطياً من E إلى H ، أي $u \in \mathcal{L}(E, H)$.

عندئذ يوجد تطبيق خطي وحيد $u^* : \mathcal{L}(H, E) \ni u^*$ ، نسميه مُرافق التطبيق u ، يُحقق ما يلي :

$$\forall (x, y) \in E \times H, \quad \langle y, u(x) \rangle_H = \langle u^*(y), x \rangle_E$$

وإذا زوّدنا الفضاءات $\mathcal{L}(E, H)$ و $\mathcal{L}(H, E)$ و $\mathcal{L}(E, E)$ و $\mathcal{L}(H, H)$ بتنظيم التطبيقات الخطية المستمرة، صار لدينا

$$\forall u \in \mathcal{L}(E, H), \quad \|u\| = \|u^*\| = \sqrt{\|u \circ u^*\|} = \sqrt{\|u^* \circ u\|}$$

الإلانات

ليكن y عنصراً من H . لَمّا كان التطبيق $x \mapsto \langle y, u(x) \rangle_H$ شكلاً خطياً على E ،

يوجد بمقتضى المبرهنة VII.4-1. عنصر وحيد $u^*(y)$ في E بحيث يكون

$$\forall x \in E, \quad \langle y, u(x) \rangle_H = \langle u^*(y), x \rangle_E$$

نسبت إذن أنّ التطبيق $u^* : H \rightarrow E, y \mapsto u^*(y)$ تطبيق خطي.

في الحقيقة، أيّا كان $H^2 \ni (y, z)$ ، و $\mathbb{K}^2 \ni (t, s)$ ، و $E \ni x$ ، فإنّ

$$\begin{aligned} \langle u^*(\lambda y + \mu z), x \rangle_E &= \langle \lambda y + \mu z, u(x) \rangle_H \\ &= \bar{\lambda} \langle y, u(x) \rangle_H + \bar{\mu} \langle z, u(x) \rangle_H \\ &= \bar{\lambda} \langle u^*(y), x \rangle_E + \bar{\mu} \langle u^*(z), x \rangle_E \\ &= \langle \lambda u^*(y) + \mu u^*(z), x \rangle_E \end{aligned}$$

ومن ثمّ $\mathcal{L}(H, E) \ni u^*$ يقتضي $u^*(\lambda y + \mu z) = \lambda u^*(y) + \mu u^*(z)$.

من ناحية أخرى، ليكن $u \in \mathcal{L}(E, H)$ ولنعرّف المجموعة الجبرية \mathcal{A} من \mathbb{R} بالعلاقة:

$$\mathcal{A} = \left\{ \langle y, u(x) \rangle_H : \|x\|_E \leq 1 \wedge \|y\|_H \leq 1 \right\}$$

ولنضع $a = \sup \mathcal{A}$. فيكون لدينا استناداً إلى مترابطة شوارتز وحالة المساواة فيها :

$$a = \sup_{\|x\|_E \leq 1} \left(\sup_{\|y\|_H \leq 1} \langle y, u(x) \rangle_H \right) = \sup_{\|x\|_E \leq 1} \|u(x)\|_H = \|u\|$$

وبأسلوب مماثل يكون أيضاً لدينا

$$a = \sup_{\|y\|_H \leq 1} \left(\sup_{\|x\|_E \leq 1} \langle u^*(y), x \rangle_E \right) = \sup_{\|y\|_H \leq 1} \|u^*(y)\|_E = \|u^*\|$$

وهذا ما يثبت أنّ $\|u\| = \|u^*\|$.

من ناحية أخرى، أيّا كانت $E \ni x$ فلدينا:

$$\begin{aligned} \|u(x)\|_H^2 &= \langle u(x), u(x) \rangle_H = \langle u^*(u(x)), x \rangle_E \leq \|u^* \circ u(x)\|_E \|x\|_E \\ &\leq \|u^* \circ u\| \cdot \|x\|_E^2 \end{aligned}$$

ومن ثمّ يكون $\|u\| \leq \sqrt{\|u^* \circ u\|}$. ولكن لدينا أيضاً المترابطة المعاكسة:

$$\|u^* \circ u\| \leq \|u^*\| \cdot \|u\| = \|u\|^2$$

إذن $\|u\| = \sqrt{\|u^* \circ u\|}$. وبتطبيق ما أثبتناه على u^* وملاحظة أنّ $(u^*)^* = u$ ، نجد

$$\|u^*\| = \sqrt{\|(u^*)^* \circ u^*\|} = \sqrt{\|u \circ u^*\|}$$

□

وبذلك يكمل الإثبات.

6-4.VII. مبرهنة وتعريف: ليكن $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle_E)$ و $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle_H)$ فضاءي جداء سلمي منتهيي البعد على الحقل نفسه. وليكن $\mathcal{E} = \{e_1, \dots, e_n\}$ و $\mathcal{H} = \{h_1, \dots, h_m\}$ أساسين متعامدين نظاميين لـ E و H على التوالي. وأخيراً ليكن u تطبيقاً خطياً من E إلى H ، أي $u \in \mathcal{L}(E, H)$. عندئذ يكون

$$\text{mat}(u^*, \mathcal{H}, \mathcal{E}) = (\text{mat}(u, \mathcal{E}, \mathcal{H}))^*$$

الإثبات

في الحقيقة، إذا كان $\text{mat}(u, \mathcal{E}, \mathcal{H}) = (\alpha_{ij})$ وكان $\text{mat}(u^*, \mathcal{H}, \mathcal{E}) = (b_{ji})$ ، أمكن أن نعبّر عن ثوابت هاتين المصفوفتين بدلالة الأساسين المتعامدين النظاميين على النحو الآتي:

$$b_{ji} = \langle e_j, u^*(h_i) \rangle_E \quad \text{و} \quad \alpha_{ij} = \langle h_i, u(e_j) \rangle_H$$

ومن ثم إذا استخدمنا خواص الجداء السلمي وتعريف المرافق نجد

$$\overline{b_{ji}} = \overline{\langle e_j, u^*(h_i) \rangle_E} = \langle u^*(h_i), e_j \rangle_E = \langle h_i, u(e_j) \rangle_H = \alpha_{ij}$$

□

وهذا هو المطلوب إثباته.

تسمح لنا المبرهنة السابقة باستنتاج الخواص البسيطة التالية، التي نلخصها في المبرهنة التالية، علماً بأننا قد استخدمنا بعض الخواص سابقاً.

7-4.VII. مبرهنة: لتكن E و F و H ثلاثة فضاءات جداء سلمي منتهية البعد على الحقل نفسه. عندئذ:

$$\diamond \text{ أياً كان } u \text{ و } v \text{ من } \mathcal{L}(E, F) \text{ و أياً كان } \lambda \in \mathbb{K} \text{ فإن}$$

$$(\lambda u + v)^* = \bar{\lambda} u^* + v^*$$

$$\diamond \text{ أياً كان } u \text{ من } \mathcal{L}(E, F) \text{ لدينا } (u^*)^* = u$$

$$\diamond \text{ أياً كان } u \text{ من } \mathcal{L}(E, F) \text{ و أياً كان } v \text{ من } \mathcal{L}(F, H) \text{ فلدينا}$$

$$(v \circ u)^* = u^* \circ v^*$$

$$\diamond \text{ وأخيراً إذا كان } u \text{ من } \mathcal{L}(E, F) \text{ قلوياً كان } u^* \text{ قلوياً وكان}$$

$$(u^*)^{-1} = (u^{-1})^*$$

8-4.VII تعريف : ليكن $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ فضاء جداء سلمي منتهي البعد على الحقل \mathbb{K} .

< في حالة $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ، نسمي كل تطبيق خطي $u \in \mathcal{L}(E)$ يُحقق الشرط $u^* = u$ تطبيقاً خطياً متناظراً.

< في حالة $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ، نسمي كل تطبيق خطي $u \in \mathcal{L}(E)$ يُحقق الشرط $u^* = u$ تطبيقاً خطياً هرميتياً.

< ونقول عن تطبيق خطي $u \in \mathcal{L}(E)$ إنه موجب إذا وفقط إذا تحقق الشرطان

$$\begin{aligned} u^* &= u & \circ \circ \\ \forall x \in E, \langle x, u(x) \rangle &\in \mathbb{R}_+ & \circ \circ \end{aligned}$$

< ونقول عن تطبيق خطي $u \in \mathcal{L}(E)$ إنه معرف وموجب إذا وفقط إذا تحقق الشرطان

$$\begin{aligned} u^* &= u & \circ \circ \\ \forall x \in E \setminus \{0\}, \langle x, u(x) \rangle &\in \mathbb{R}_+^* & \circ \circ \end{aligned}$$

< في حالة $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ، نسمي كل تطبيق خطي $u \in \mathcal{L}(E)$ يُحقق الشرط $u^* = u^{-1}$ تطبيقاً خطياً متعامداً.

< في حالة $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ، نسمي كل تطبيق خطي $u \in \mathcal{L}(E)$ يُحقق الشرط $u^* = u^{-1}$ تطبيقاً خطياً واحدياً.

9-4.VII مثال : ليكن $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ فضاء جداء سلمي منتهي البعد. وليكن $p \in \mathcal{L}(E)$ إسقاطاً

قائماً، عندئذ يكون $p^* = p$. في الحقيقة، أيما كان $(x, y) \in E^2$ فإن

$$\begin{aligned} \langle x, p(y) \rangle &= \langle x - p(x) + p(x), p(y) \rangle = \langle x - p(x), p(y) \rangle + \langle p(x), p(y) \rangle \\ &= \langle p(x), p(y) \rangle = \langle p(x), y + p(y) - y \rangle \\ &= -\langle p(x), y - p(y) \rangle + \langle p(x), y \rangle \\ &= \langle p(x), y \rangle \end{aligned}$$

حيث استخدمنا كون الفضاءين الجزئيين $\text{Im } p$ و $\ker p = \text{Im}(I_E - p)$ متعامدين. وينتج من الحساب السابق

$$\forall (x, y) \in E \times E, \langle p^*(x), y \rangle = \langle x, p(y) \rangle = \langle p(x), y \rangle$$

وهذا بالطبع يكافئ $p^* = p$.

منفترض في كل ما يأتي أن الحقل \mathbb{K} هو حقل الأعداد الحقيقية.

5.VII. التطبيقات الخطية المتعامدة

5.VII.1. تعريف: ليكن $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle_E)$ و $(F, \langle \cdot, \cdot \rangle_F)$ فضاءي جداء سلمي على الحقل \mathbb{R} . وليكن $u \in \mathcal{L}(E, F)$. نقول إن u يحافظ على الجداء السلمي إذا وفقط إذا تحقق الشرط

$$\forall (x, y) \in E \times E, \quad \langle u(x), u(y) \rangle_F = \langle x, y \rangle_E$$

وهذا الشرط يكافئ، بمقتضى المطابقات القطبية، حفاظ u على النظم أي

$$\forall x \in E, \quad \|u(x)\|_F = \|x\|_E$$

وأخيراً نقول إن $u \in \mathcal{L}(E, F)$ تقابل خطي محافظ على المسافة، إذا كان u تقابلاً خطياً، من جهة أولى، وكان يحافظ على الجداء السلمي من جهة ثانية. و يلاحظ القارئ بسهولة أن كل تطبيق خطي $u \in \mathcal{L}(E, F)$ محافظ على الجداء السلمي يكون متبايناً.

5.VII.2. مبرهنة: ليكن $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle_E)$ و $(F, \langle \cdot, \cdot \rangle_F)$ فضاءي جداء سلمي على الحقل \mathbb{R} . نفترض أنهما منتهيي البعد وأن $\dim E = \dim F$. ليكن $u \in \mathcal{L}(E, F)$. عندئذ تكون الخواص التالية متكافئة:

1. التطبيق u يحافظ على الجداء السلمي.
2. التطبيق u تقابل خطي محافظ على المسافة.
3. صورة كل أساس متعامد نظامي في E هي أساس متعامد نظامي في F .
4. يوجد أساس متعامد نظامي في E بحيث تكون صورته أساساً متعامداً نظامياً في F .

الإنبات

إن إثبات هذه المبرهنة، أمر ميسور جداً انطلاقاً من التعريف، وترك تفاصيله للقارئ. \square

ليكن E فضاء إقليدياً، أي فضاء جداء سلمي منتهي البعد على الحقل IR . ينتج من التعريف والمبرهنة السابقين، أن تطبيقاً خطياً $u \in \mathcal{L}(E)$ يكون متعامداً، أي يُحقّق $u^* = u^{-1}$ ، إذا وفقط إذا كان محافطاً على الجداء السلمي. تكون مجموعة التطبيقات الخطية المتعامدة، زمرة بالنسبة إلى تركيب التطبيقات، نرمز إليها بالرمز $O(E)$ ، ونسميها الزمرة المتعامدة.

$$\begin{aligned} \forall u \in \mathcal{L}(E), \quad u \in O(E) &\Leftrightarrow u^* \circ u = I_E \\ &\Leftrightarrow u \circ u^* = I_E \end{aligned}$$

وتكون الزمرة المتعامدة $(O(E), \circ)$ زمرة جزئية من الزمرة الخطية $(\mathcal{GL}(E), \circ)$. ونشير إلى أن التعريف السابق يقتضي وضوحاً: $\forall u \in O(E)$ ، $\det u \in \{-1, +1\}$ ، ولكن العكس خطأ. ولما كان $u \mapsto \det u$ يُعرّف تشاكلاً زمرياً بين $O(E)$ و $\{-1, +1\}$ كانت نواة هذا التشاكل أي $\{u \in O(E), \det u = 1\}$ زمرة جزئية من $O(E)$ نسميها زمرة الدورانات ونرمز إليها بالرمز $O^+(E)$ ، ونرمز عادة بالرمز $O^-(E)$ إلى المجموعة $O(E) \setminus O^+(E)$ وهي بالطبع ليست زمرة.

يمكننا إسقاط الملاحظة السابقة على المصفوفات الحقيقية المرتبة، فنرمز بالرمز $O(n)$ إلى مجموعة المصفوفات $M_n(IR)$ التي تُحقّق ${}^t A A = I_n$ أو الشرط المكافئ $A {}^t A = I_n$. وهي، مزودة بقانون ضرب المصفوفات، تكون زمرة جزئية من زمرة المصفوفات الحقيقية المربعة القلوبة من المرتبة $n: \mathcal{GL}_n(IR)$. ونعرّف بأسلوب مماثل لما سبق $O^+(n)$ و $O^-(n)$. وأخيراً إذا كان E فضاء إقليدياً، بعده n ، وكان $\mathcal{E} = (e_1, \dots, e_n)$ أساساً متعامداً نظامياً لـ E ، كان التطبيق $\Phi: O(E) \rightarrow O(n)$ ، $u \mapsto \text{mat}(u, \mathcal{E}, \mathcal{E})$ تشاكلاً تقابلياً زمرياً.

تسمح لنا الدراسة السابقة بتعريف توجيه لفضاء إقليدي:

ليكن E فضاء إقليدياً، بعده n ، ولنرمز بالرمز $BON(E)$ إلى مجموعة الأسس المتعامدة النظامية للفضاء E . فإذا كان $\mathcal{E} = (e_1, \dots, e_n)$ و $\mathcal{E}' = (e'_1, \dots, e'_n)$ عنصرين من $BON(E)$ ، عرفنا التطبيق الخطي المتعامد الوحيد $U_{\mathcal{E}, \mathcal{E}'}$ بالشرط:

$$\forall k \in \mathbb{N}_n, \quad U_{\mathcal{E}, \mathcal{E}'}(e_k) = e'_k$$

يسمح لنا هذا بتعريف علاقة ثنائية \mathfrak{R} على المجموعة $BON(E)$ ، على النحو الآتي:

$$\mathcal{E} \mathfrak{R} \mathcal{E}' \Leftrightarrow \det(U_{\mathcal{E}, \mathcal{E}'}) = 1 \Leftrightarrow U_{\mathcal{E}, \mathcal{E}'} \in O^+(E)$$

ونتحقق بسهولة أن \mathcal{R} علاقة تكافؤ على المجموعة $BON(E)$:

- فهي العكاسية لأن $U_{E,E} = I_E$ ، أيًا كان E من $BON(E)$.
- وهي تناظرية لأن $U_{E,E}^{-1} = U_{E,E}$ ، أيًا كان E و E' من $BON(E)$.
- وأخيراً هي متعدية لأن $U_{E,F} \circ U_{F,G} = U_{E,G}$ ، أيًا كان E و F و G من $BON(E)$.

وأخيراً، إن هذه العلاقة صفية تكافؤ اثنين فقط. ذلك لأنه إذا كان $E^+ = (e_1, \dots, e_n)$ عنصراً ما من $BON(E)$ ، وعرفنا $E^- = (-e_1, \dots, e_n)$ ، كان

$$BON(E)/\mathcal{R} = \{[E^+], [E^-]\}$$

في الحقيقة، لما كان $\det(U_{E^+, E^-}) = -1$ ، كان $[E^+] \neq [E^-]$ ، هذا من جهة أولى. ومن جهة ثانية، إذا كان F عنصراً ما من $BON(E)$ ، نتج من العلاقة

$$U_{E^-, F} \circ U_{E^+, E^-} = U_{E^+, F}$$

أن $\det(U_{E^+, F}) = -\det(U_{E^-, F})$. فإما أن يكون $\det(U_{E^+, F}) = 1$ ومن ثم $[E^+] \ni F$ ، أو أن يكون $\det(U_{E^-, F}) = 1$ ، وهذا يقتضي $[E^-] \ni F$. أي إن $[F] \in \{[E^+], [E^-]\}$.

نسَمي صفية التكافؤ، في $BON(E)/\mathcal{R}$ ، توجيهين للفضاء الإقليدي E . ويكون توجيه الفضاء الإقليدي E ، هو اختيار أحد التوجيهين السابقين، أي اختيار أساس متعامد نظامي E من $BON(E)$. فنسَمي $[E]$ توجيهاً مباشراً ونسَمي صف التكافؤ الثاني توجيهاً رجعياً أو غير مباشر. ونسَمي عناصر $[E]$ أساساً متعامداً نظامياً مباشرة.

3.5.VII. مثال: لندرس الزمرة $O(2)$.

تكون المصفوفة المربعة $M = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$ متعامدة إذا وفقط إذا كان $M^t M = I_2$ ،

وهذا يكافئ الشرطين :

$$(٥) \quad a^2 + b^2 = c^2 + d^2 = 1$$

$$(٦) \quad ac + bd = 0$$

ينتج من (٥) أنه يوجد عدداً حقيقيّان $(\theta, \varphi) \in \mathbb{R}^2$ بحيث

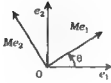
$$(c, d) = (\sin \varphi, \cos \varphi) \quad \text{و} \quad (a, b) = (\cos \theta, \sin \theta)$$

وينتج من العلاقة (v) أن

$$\cos\theta \sin\varphi + \sin\theta \cos\varphi = \sin(\theta + \varphi) = 0$$

وهذا يُعطي حلين للمسألة: $\varphi \in (-\theta + 2\pi\mathbb{Z})$ أو $\varphi \in (\pi - \theta + 2\pi\mathbb{Z})$. إذن للمصفوفة M أحد الشكلين الآتين:

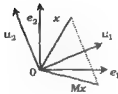
$$S_\theta = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{bmatrix} \text{ أو } R_\theta = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$



إذا كانت $M = R_\theta$ كان $\det M = +1$ ، فهي إذن مصفوفة دوران أي $M \in O^+(2)$ ، وهي تُمثل هندسياً الدوران بزاوية θ حول المبدأ O ، أي الذي مركزه O .

أما إذا كانت $M = S_\theta$ فيكون $\det M = -1$ ، ويكون كثير الحدود المميز لـ M هو $X^2 - 1$

ومن ثم $\text{sp}(M) = \{-1, +1\}$ ، ويكوّن الشعاعان $u_1 = \begin{bmatrix} \cos \frac{\theta}{2} \\ \sin \frac{\theta}{2} \end{bmatrix}$ و $u_2 = \begin{bmatrix} -\sin \frac{\theta}{2} \\ \cos \frac{\theta}{2} \end{bmatrix}$ أساساً



متعامداً نظامياً للفضاء الإقليدي المألوف $M_{2,1}(\mathbb{R})$ ، مؤلفاً من أشعة ذاتية للمصفوفة M . أي $Mu_1 = u_1$ و $Mu_2 = -u_2$. فهي تُمثل هندسياً التناظر القائم حول المستقيم الشعاعي الموجه بالشعاع u_1 أي $\mathbb{R}u_1$.

4.5.VII. مثال: الجداء الخارجي والجداء المختلط في فضاء إقليدي ثلاثي البعد.

ليكن E فضاءً إقليدياً موجهاً بعده 3. وليكن $\mathcal{E} = (e_1, e_2, e_3)$ و $\mathcal{F} = (f_1, f_2, f_3)$ أساسين متعامدين نظاميين مباشرين في E . لَمَّا كان بُعد فضاء الأشكال الـ 3-خطية المتناوبة هو 1، يوجد عدد $\lambda \in \mathbb{R}$ ، بحيث $\det_{\mathcal{E}} = \lambda \det_{\mathcal{F}}$ ، ومن ثم

$$\lambda = \det_{\mathcal{E}}(f_1, f_2, f_3) = \det U_{\mathcal{E}\mathcal{F}} = 1$$

نستنتج من ذلك أن $\det_{\mathcal{E}} = \det_{\mathcal{F}}$.

تسمح لنا الملاحظة السابقة أن نستنتج الخاصّة التالية:

ليكن E فضاء إقليدياً موجّهاً بُعد 3. يوجد شكل ثلاثي الخطية متناوبٌ وحيدٌ δ_E على E يُحقّق $\delta_E = \det_{\mathcal{E}}$ أيّاً كان الأساس المتعامد النظامي المباشر \mathcal{E} للفضاء الإقليدي الموجّه E ، نسمّي δ_E الجداء المختلط على E .

ونستخدم الرمز $[x_1, x_2, x_3]$ دلالة على $\delta_E(x_1, x_2, x_3)$. فيكون

- $\forall (x_1, x_2, x_3) \in E^3, [x_1, x_2, x_3] = \det_{\mathcal{E}}(x_1, x_2, x_3)$
حيث \mathcal{E} أساس متعامد نظامي مباشر ما للفضاء E .

ليكن E فضاءً إقليدياً موجّهاً بُعد 3. وليكن v_1 و v_2 شعاعين من E . كما كان التطبيق $E \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto [v_1, v_2, x]$ شكلاً خطياً على E ، نعلم أنّه يوجد شعاع وحيد، نرمز إليه بالرمز $v_1 \wedge v_2 \in E$ ، بحيث

- $\forall x \in E, [v_1, v_2, x] = \langle v_1 \wedge v_2, x \rangle$
نسمّي الشعاع $v_1 \wedge v_2$ الجداء الشعاعي لـ v_1 و v_2 بهذا الترتيب.
ليكن $\mathcal{E} = (e_1, e_2, e_3)$ أساساً متعامداً نظامياً مباشراً ما لـ E . ولنفرض أنّ

$$v_2 = \eta_1 e_1 + \eta_2 e_2 + \eta_3 e_3 \quad \text{و} \quad v_1 = \zeta_1 e_1 + \zeta_2 e_2 + \zeta_3 e_3$$

عندئذ، أيّاً كان الشعاع $x = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3$ من E ، نجد بنشر الخدّد وفق العمود الأخير:

$$[v_1, v_2, x] = \det \begin{bmatrix} \zeta_1 & \eta_1 & \alpha_1 \\ \zeta_2 & \eta_2 & \alpha_2 \\ \zeta_3 & \eta_3 & \alpha_3 \end{bmatrix} = \alpha_1 \det \begin{bmatrix} \zeta_2 & \eta_2 \\ \zeta_3 & \eta_3 \end{bmatrix} - \alpha_2 \det \begin{bmatrix} \zeta_1 & \eta_1 \\ \zeta_3 & \eta_3 \end{bmatrix} + \alpha_3 \det \begin{bmatrix} \zeta_1 & \eta_1 \\ \zeta_2 & \eta_2 \end{bmatrix}$$

وهذا يبيّن أنّ

$$v_1 \wedge v_2 = (\zeta_2 \eta_3 - \zeta_3 \eta_2) e_1 + (\zeta_3 \eta_1 - \zeta_1 \eta_3) e_2 + (\zeta_1 \eta_2 - \zeta_2 \eta_1) e_3$$

ويعطينا طريقة عمليّة لحساب الجداء الشعاعي.

نلاحظ من التعريف ● أنّ الشعاع $v_1 \wedge v_2$ عمودي على كلٍّ من v_1 و v_2 . ونترك

للقارئ أن يتحقّق صحّة المتطابقة المهمّة التالية والمعروفة باسم مطابقة Lagrange

$$\|v_1 \wedge v_2\|^2 + |\langle v_1, v_2 \rangle|^2 = \|v_1\|^2 \cdot \|v_2\|^2$$

والتي ينتج منها أنَّ

$$\|v_1 \wedge v_2\| = \|v_1\| \cdot \|v_2\| \sin(\hat{x}_1, \hat{x}_2)$$

يُحقّق الجداءان الشعاعي والمختلط الخواص التالية:

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall (a, b, c) \in E^3 \quad (\lambda a + b) \wedge c = \lambda(a \wedge c) + (b \wedge c) \quad .1$$

$$\forall (a, b) \in E^3, \quad a \wedge b = -(b \wedge a) \quad .2$$

$$\forall (a, b, c) \in E^3, \quad a \wedge (b \wedge c) = (a, c)b - (a, b)c \quad .3$$

$$\forall (a, b, c) \in E^3, \quad a \wedge (b \wedge c) + b \wedge (c \wedge a) + c \wedge (a \wedge b) = 0 \quad .4$$

$$\forall (a, b, c) \in E^3, \quad (a \wedge b) \wedge (a \wedge c) = [a, b, c]a \quad .5$$

$$\forall (a, b, c) \in E^3, \quad [a \wedge b, b \wedge c, c \wedge a] = [a, b, c]^2 \quad .6$$

وأخيراً، إذا كان a و b شعاعين من E بحيث $a \neq 0$ ، فإن الشرط اللازم والكافي

حتى يوجد شعاع $x \in E$ يُحقّق $a \wedge x = b$ هو أن يكون $a \perp b$ ، وفي هذه الحالة تكون

مجموعة حلول المعادلة $a \wedge x = b$ هي

$$\left\{ \frac{1}{\|a\|^2} b \wedge a + \lambda a : \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$

سننهي هذه الفقرة بالمبرهنة التالية، التي تعطي تقريباً للمصفوفات المربعة مهماً في بعض

مسائل التحليل العددي:

5-5.VII. مبرهنة: -تفريق Iwasawa- لتكن $M \in M_n(\mathbb{R})$ ، مصفوفة قَلْبُوبَة. عندئذ توجد ثنائية

وحيدة (O, T) حيث O مصفوفة متعامدة من المربة n ، و T مصفوفة مثلثية عليا، عناصر

قطرها الأساسي موجبة تماماً، بحيث $M = OT$.

الإثبات

لتعرف $G = {}^t M M$ ، فتكون G مصفوفة معرفة موجبة عملاً بالملاحظة 2.VII-11. إذن

نجد استناداً إلى تفريق Cholesky، (انظر المبرهنة 2.VII-10.) مصفوفة مثلثية عليا T ، عناصر

قطرها الأساسي موجبة تماماً، بحيث $G = {}^t M M = {}^t T T$. ومن ثم يكون $M = OT$ حيث عرفنا

المصفوفة O بالعلاقة $O = ({}^t M)^{-1} {}^t T = ({}^t T M^{-1})$.

بقي أن نثبت أنَّ $O \in O(n)$ ، ولكنه أمر واضح لأن المساواة ${}^t M M = {}^t T T$ تقتضي:

$$O = M T^{-1} = (T M^{-1})^{-1} = ({}^t O)^{-1}$$

بذلك نكون قد أثبتنا الشق المتعلق بوجود التفريق من المبرهنة. لنثبت إذن الوحدةانية. لنفترض أن $M = OT = O'T'$ ، حيث نُحققَ التاليان (O, T) و (O', T') شروط المبرهنة. عندئذ يكون $OO' = T^{-1}T' = D$ أي تكون المصفوفة $T^{-1}T' = D$ مصفوفةً مثلثيةً عليا ثوابت قطرها الأساسي موجبة تماماً، وهي أيضاً مصفوفة متعامدة: $O(n) \ni D$. هذا يقتضي بالطبع أن يكون $D = I_n$ ، أي $T = T'$ ، ومن ثم $O = O'$. \square

6.VII. اختزال التطبيقات الخطية المتناظرة

في كامل هذه الفقرة، يمثل E فضاءً إقليدياً بُعدُه $n \in \mathbb{N}^*$.

6.VII.1. مبرهنة: ليكن u تطبيقاً خطياً متناظراً من $\mathcal{L}(E)$. عندئذ تتحقق الخواص التالية:

1. إذا كان F فضاءً شعاعياً جزئياً من E ، يُحقق $u(F) \subset F$ ، كان $u(F^\perp) \subset F^\perp$.

2. إذا كانت λ و μ قيمتين ذاتيتين مختلفتين لـ u ، كان الفضاءان الجزئيان الذاتيان

$$E_\lambda = \ker(u - \lambda I_E) \text{ و } E_\mu = \ker(u - \mu I_E) \text{ متعامدين: } E_\lambda \perp E_\mu.$$

3. إن طيف u غير خالٍ: $\text{sp}(u) \neq \emptyset$ ، أي إن للتطبيق الخطي u قيمة ذاتية واحدة

على الأقل.

الإثبات

1. لتكن $x \in F^\perp$. عندئذ، أيما كان $z \in F$ ،

$$\langle u(x), z \rangle = \langle x, u^*(z) \rangle \stackrel{u=u^*}{=} \left\langle x, \begin{matrix} x \\ F^\perp \end{matrix}, \begin{matrix} u(z) \\ F \end{matrix} \right\rangle = 0$$

إذن $u(x) \in F^\perp$. وهذا ما يُثبت أن $u(F^\perp) \subset F^\perp$.

2. لتكن $E_\lambda \times E_\mu \ni (x, y)$. عندئذ يكون

$$\lambda \langle x, y \rangle = \langle \lambda x, y \rangle \stackrel{x \in E_\lambda}{=} \langle u(x), y \rangle = \langle x, u^*(y) \rangle \stackrel{u=u^*}{=} \langle x, u(y) \rangle \stackrel{y \in E_\mu}{=} \langle x, \mu y \rangle = \mu \langle x, y \rangle$$

وهذا يقتضي $\langle x, y \rangle = 0$ لأن $\lambda \neq \mu$.

3. لنكن المجموعة الجزئية $S = \{x \in E : \|x\| = 1\}$ من E . إنها مجموعة مغلقة ومحدودة في الفضاء الشعاعي المنظم E ، فهي إذن مجموعة متراسة لأن بُعد E منته. ومن ثَمَّ فإن استمرار التابع الحقيقي:

$$\varphi : S \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \langle u(x), x \rangle$$

على هذه المجموعة المتراسة يجعله يبلغ حدّه الأعلى عليها، أي يوجد عنصر $x_0 \in S$ بحيث

$$\lambda = \varphi(x_0) = \max_{x \in S} \varphi(x)$$

ويكون لدينا، بناءً على تعريف λ ،

$$\forall y \in E, \forall t \in \mathbb{R}, \langle u(x_0 + ty), x_0 + ty \rangle \leq \lambda \|x_0 + ty\|^2$$

لأنه في حالة $x_0 + ty \neq 0$ يكون الشعاع $z = \frac{1}{\|x_0 + ty\|}(x_0 + ty)$ عنصراً من S . وينتج

من نشر المتراجحة السابقة أنه

$$\forall y \in E, \forall t \in \mathbb{R}, t^2 (\lambda \|y\|^2 - \langle u(y), y \rangle) + 2t (\lambda \langle x_0, y \rangle - \langle u(x_0), y \rangle) \geq 0$$

وينجم عن ذلك أنّ أمثال t معدومة، أي

$$\forall y \in E, \lambda \langle x_0, y \rangle - \langle u(x_0), y \rangle = \langle \lambda x_0 - u(x_0), y \rangle = 0$$

وهذا يقتضي $u(x_0) = \lambda x_0$ ، ومن ثَمَّ يكون $\text{sp}(u) \ni \lambda$ لأنّ $0 \neq x_0$. \square

2-6.VII. ملاحظة: إذا كان u تطبيقاً خطياً متناظراً من $\mathcal{L}(E)$. كان $-u$ تطبيقاً خطياً متناظراً أيضاً، وينتج من الإبلات السابق أنّ كلا من العددين

$$\Lambda_{\min} = \min_{\|x\|=1} \langle u(x), x \rangle \quad \text{و} \quad \Lambda_{\max} = \max_{\|x\|=1} \langle u(x), x \rangle$$

عنصر من $\text{sp}(u)$. ومن جهة أخرى، تتحقق دوماً المتراجحة

$$\forall \mu \in \text{sp}(u), \quad \Lambda_{\min} \leq \mu \leq \Lambda_{\max}$$

تسمح لنا هذه الملاحظة أن نستنتج أنّ $\Lambda_{\min} = \min \text{sp}(u)$ و $\Lambda_{\max} = \max \text{sp}(u)$.

ومنه

$$\min \text{sp}(u) = \min_{\|x\|=1} \langle u(x), x \rangle \quad \text{و} \quad \max \text{sp}(u) = \max_{\|x\|=1} \langle u(x), x \rangle$$

3-6.VII. مبرهنة: - التحليل الطيفي- ليكن u تطبيقاً خطياً متناظراً من $\mathcal{L}(E)$. نرمز، أياً كان

$\lambda \in \text{sp}(u)$ ، بالرمز P_λ إلى الإسقاط القائم لـ E على الفضاء الجزئي الذاتي الموافق

لـ λ : $E_\lambda = \ker(u - \lambda I_E)$. عندئذ تتحقق الخواص التالية:

$$\forall (\lambda, \mu) \in (\text{sp}(u))^2, \quad \lambda \neq \mu \Rightarrow P_\lambda \circ P_\mu = 0 \quad .1'$$

$$I_E = \sum_{\lambda \in \text{sp}(u)} P_\lambda \quad .2'$$

$$u = \sum_{\lambda \in \text{sp}(u)} \lambda \cdot P_\lambda \quad .3'$$

وتسمى الجماعة $(P_\lambda)_{\lambda \in \text{sp}(u)}$ تحليلاً طيفياً لـ u ، وهي وحيدة بالمعنى الآتي: إذا كانت

Λ مجموعة جزئية غير خالية من \mathbb{R} ، وكانت $(Q_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ جماعة من الإسقاطات القائمة

وغير المعدومة من $\mathcal{L}(E)$ ، بحيث تتحقق الخواص:

$$\forall (\lambda, \mu) \in \Lambda^2, \quad \lambda \neq \mu \Rightarrow Q_\lambda \circ Q_\mu = 0 \quad .1''$$

$$I_E = \sum_{\lambda \in \Lambda} Q_\lambda \quad .2''$$

$$u = \sum_{\lambda \in \Lambda} \lambda \cdot Q_\lambda \quad .3''$$

عندئذ لا بُدَّ أن يكون $\Lambda = \text{sp}(u)$ و $Q_\lambda = P_\lambda$ $\forall \lambda \in \Lambda$.

وأخيراً، إذا كان $\lambda \in \text{sp}(u)$ ، وعرفنا كثير الحدود $\frac{X - \mu}{\lambda - \mu}$ $\prod_{\mu \in \text{sp}(u) \setminus \{\lambda\}}$ $\ell_\lambda(X) =$ من

$$P_\lambda = \ell_\lambda(u) \quad \text{كان } \mathbb{R}[X]$$

الإثبات

لنثبت أولاً أنَّ الجماعة $(P_\lambda)_{\lambda \in \text{sp}(u)}$ تُحقق الخواص 1'. و 2'. و 3'.

- لنكن $(\lambda, \mu) \in (\text{sp}(u))^2$ بحيث $\lambda \neq \mu$. عندئذ استناداً إلى المبرهنة 1-6.VII، يكون

$$E_\lambda \perp E_\mu \quad \text{ومنه } E_\lambda \perp E_\mu = \ker P_\mu \quad \text{وهذا يقتضي } P_\lambda \circ P_\mu = 0.$$

- من ناحية أخرى، لنعرف $F = \bigoplus_{\lambda \in \text{sp}(u)} E_\lambda$ ، فيكون لدينا وضوحاً $u(F) \subset F$ ، ومن

ثمَّ $u(F^\perp) \subset F^\perp$ بناءً على المبرهنة 1-6.VII.

لنفترض جدلاً أنَّ $E \neq F$ أي $F^\perp \neq \{0\}$ ، ولتأمل التطبيق الخطي

$$v = u|_{F^\perp} : F^\perp \rightarrow F^\perp, \quad x \mapsto u(x)$$

نتحقق بسهولة أنّ u تطبيق خطي متناظر من $(F^\perp, \mathcal{L}(F^\perp))$ ، إذن $\text{sp}(u) \neq \emptyset$. أي يوجد $\lambda_0 \in \text{sp}(u)$ و يوجد عنصر $x \in F^\perp$ يكون شعاعاً ذاتياً لـ u موافقاً للقيمة الذاتية λ_0 . أي $u(x) = v(x) = \lambda_0 x$ و $0 \neq x$ ومنه

$$x \neq 0 \text{ و } x \in E_{\lambda_0} \cap (F^\perp) \subset E_{\lambda_0} \cap (E_{\lambda_0}^\perp) = \{0\}$$

يُثبت هذا التناقض، أنّ $E = F$. أي إنّ

$$E = \bigoplus_{\lambda \in \text{sp}(u)} E_\lambda$$

فإذا كانت $x \in E$ ، أمكن أن نكتبها بطريقة وحيدة بالشكل $x = \sum_{\lambda \in \text{sp}(u)} x_\lambda$ حيث

$$E_\lambda \ni x_\lambda \text{ وتبين الخاصّة 1. أنّ}$$

$$\forall (\lambda, \mu) \in (\text{sp}(u))^2, \lambda \neq \mu \Rightarrow P_\lambda(x_\mu) = P_\lambda \circ P_\mu(x_\mu) = 0$$

وهذا يقضي، انطلاقاً من المساواة: $x = \sum_{\lambda \in \text{sp}(u)} x_\lambda$ ، أن يكون

$$\forall \lambda \in \text{sp}(u), P_\lambda(x) = x_\lambda$$

ومن ثمّ يكون $x = \sum_{\lambda \in \text{sp}(u)} P_\lambda(x)$. وهذه هي الخاصّة 2.

- وأخيراً، لما كان $E_\lambda = \ker(u - \lambda I_E)$ ، نتج أنّ

$$\forall \lambda \in \text{sp}(u), u \circ P_\lambda = \lambda \cdot P_\lambda$$

ومنه

$$u = u \circ I_E = u \circ \left(\sum_{\lambda \in \text{sp}(u)} P_\lambda \right) = \sum_{\lambda \in \text{sp}(u)} u \circ P_\lambda = \sum_{\lambda \in \text{sp}(u)} \lambda \cdot P_\lambda$$

وهذه هي الخاصّة 3.

لنأت إلى إثبات الوحداتيّة:

نبدأ بتعريف الفضاءات الشعاعية الجزئية من E : $F_\lambda = \text{Im } Q_\lambda$ حيث $\lambda \in \Lambda$ ، وهي

جميعاً غير تافهة، أي لا تساوي $\{0\}$ ، لأنّ $Q_\lambda \neq 0$. $\forall \lambda \in \Lambda$.

ليكن $\lambda \in \Lambda$ ، وليكن x عنصراً من $(\sum_{\mu \in \Lambda \setminus \{\lambda\}} F_\mu)$ إذن

$$\forall \mu \in \Lambda \setminus \{\lambda\}, F_\mu \ni x_\mu \text{ حيث } x = \sum_{\mu \in \Lambda \setminus \{\lambda\}} x_\mu \text{ و } F_\lambda \ni x$$

وبالاعتماد على الخاصية '1'. يكون

$$x = \mathcal{G}_\lambda(x) = \sum_{\mu \in \Lambda \setminus \{\lambda\}} \mathcal{G}_\lambda(x_\mu) = \sum_{\mu \in \Lambda \setminus \{\lambda\}} \mathcal{G}_\lambda \circ \mathcal{G}_\mu(x_\mu) = 0$$

بذا نكون قد أثبتنا أن $\{0\} = F_\lambda \cap (\sum_{\mu \in \Lambda \setminus \{\lambda\}} F_\mu)$. $\forall \lambda \in \Lambda$. فالجملوع مباشر.

ومن جهة أخرى، تُبين الخاصية '2'. أن $E = \sum_{\lambda \in \Lambda} F_\lambda$. إذن

$$E = \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} F_\lambda$$

لتكن $\lambda \in \Lambda$ ، نجد اعتماداً على الخاصيتين '1' و '3'. أن $\forall x \in F_\lambda$ ، $u(x) = \lambda x$

وهذا يقتضي $\lambda \in \text{sp}(u)$ ، و $E_\lambda \supset F_\lambda$ إذن

$$\forall \lambda \in \Lambda, F_\lambda \subset E_\lambda \text{ و } \Lambda \subset \text{sp}(u)$$

ومن ثم

$$\dim E = \sum_{\lambda \in \Lambda} \dim F_\lambda \leq \sum_{\lambda \in \Lambda} \dim E_\lambda \leq \sum_{\lambda \in \text{sp}(u)} \dim E_\lambda = \dim E$$

نستنتج من ذلك أنه لا بُد أن تكون هنالك مساواة في جميع المتراجحات السابقة : المساواة (٠)

تقتضي $\Lambda = \text{sp}(u)$ ، والمساواة (٧) تقتضي $F_\lambda = E_\lambda$. $\forall \lambda \in \Lambda$. وهذا يُثبت الوحدة.

أخيراً، ينبج عن '1' و '3'. ما يلي :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, u^k = \sum_{\lambda \in \text{sp}(u)} \lambda^k \cdot P_\lambda$$

وهذه المساواة صحيحة أيضاً حين يكون $0 = k$ بناءً على '2'. ومنه نجد

$$\forall S \in \mathbb{R}[X], S(u) = \sum_{\mu \in \text{sp}(u)} S(\mu) \cdot P_\mu$$

وبوجه خاص نجد بأخذ $S = \ell_\lambda$ أن

$$\ell_\lambda(u) = \sum_{\mu \in \text{sp}(u)} \ell_\mu(\lambda) \cdot P_\mu = \sum_{\mu \in \text{sp}(u)} \delta_{\mu, \lambda} \cdot P_\mu = P_\lambda$$

وبهذا يكتمل البرهان.

□

4-6.VII. نتيجة: ليكن u تطبيقاً خطياً متناظراً من $\mathcal{L}(E)$. عندئذ يوجد أساس متعامد نظامي $\mathcal{E} = (e_1, \dots, e_n)$ لـ E بحيث تكون المصفوفة $\text{mat}(u, \mathcal{E}, \mathcal{E})$ قطرية.

الإثبات

لتأمل، أيما كانت $\lambda \in \text{sp}(u)$ ، الفضاء الذاتي $E_\lambda = \ker(u - \lambda I_E)$. عندئذ يكون لدينا، استناداً إلى المبرهنة السابقة:

$$E = \bigoplus_{\lambda \in \text{sp}(u)} E_\lambda$$

ونحصل على الأساس المتعامد النظامي المطلوب بأن نختار، أيما كانت $\lambda \in \text{sp}(u)$ ، أساساً متعامداً نظامياً \mathcal{E}_λ لـ E_λ ، ومن ثم نضع $\mathcal{E} = \bigcup_{\lambda \in \text{sp}(u)} \mathcal{E}_\lambda$. \square

يمكننا ترجمة النتيجة السابقة إلى لغة المصفوفات فنحصل على النتيجة التالية:

5-6.VII. نتيجة: لنكن $A \in M_n(\mathbb{R})$ مصفوفة متناظرة. عندئذ توجد مصفوفة متعامدة $O \in O(n)$ ، وتوجد مصفوفة قطرية $D \in M_n(\mathbb{R})$ بحيث

$$A = O D {}^tO$$

وأخيراً نختتم هذا البحث بالخاصتين التاليتين تاركين إثباتهما البسيط تمريناً للقارئ.

6-6.VII. نتيجة: ليكن u تطبيقاً خطياً متناظراً من $\mathcal{L}(E)$. عندئذ يتحقق التكافؤان التاليان:

$$\diamond \quad u \text{ موجب} \Leftrightarrow \text{IR}_+ \supset \text{sp}(u)$$

$$\diamond \quad u \text{ معرف موجب} \Leftrightarrow \text{IR}_+^* \supset \text{sp}(u)$$

7-6.VII. نتيجة: ليكن u تطبيقاً خطياً متناظراً من $\mathcal{L}(E)$ ، ولتوود $\mathcal{L}(E)$ بنظم التطبيقات الخطية المستمرة. عندئذ يكون

$$\|u\| = \max_{\lambda \in \text{sp}(u)} |\lambda| = \max(-\Lambda_{\min}, \Lambda_{\max})$$

حيث

$$\Lambda_{\min} = \min_{\|x\|=1} \langle u(x), x \rangle = \min \text{sp}(u)$$

$$\Lambda_{\max} = \max_{\|x\|=1} \langle u(x), x \rangle = \max \text{sp}(u) \quad \text{و}$$



تمرينات

التمرين 1. ليكن $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ فضاء جداء سلمي، وليكن (e_1, \dots, e_n) جملة أشعة من E تُحقق الشرطين:

$$1. \quad \forall i \in \mathbb{N}_n, \quad \|e_i\| = 1$$

$$2. \quad \forall x \in E, \quad \sum_{i=1}^n \langle x, e_i \rangle^2 = \|x\|^2$$

أثبت أن الجملة (e_1, \dots, e_n) أساس متعامد نظامي للفضاء E .

التمرين 2. ليكن $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ فضاء جداء سلمي، وليكن (x_1, \dots, x_n) جملة أشعة من E .

$$1. \quad \text{أثبت أن} \quad \sum_{i < j} \|x_i - x_j\|^2 = n \sum_{i=1}^n \|x_i\|^2 - \left\| \sum_{i=1}^n x_i \right\|^2$$

2. نفترض أن $\|x_i\| \leq R$ أيًا كان $i \in \mathbb{N}_n$. وأن $\|x_i - x_j\| \geq 2$ أيًا كان $(i, j) \in \mathbb{N}_n^2$.
بحيث $j \neq i$. أثبت أن $\sqrt{2(n-1)/n} \leq R$. هل هذه أفضل نتيجة ممكنة؟

التمرين 3. ليكن $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ فضاء جداء سلمي. نذكر بأن $\bar{B}(0, r)$ هي الكرة المغلقة التي

مركزها 0 ونصف قطرها $0 < r$ ، وإذا كان $(x, y) \in E^2$ فإننا نعرف

$$\{\lambda x + (1-\lambda)y; \lambda \in [0, 1]\} = [x, y]$$

ليكن $(\mathbb{R}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ أثبت أن

$$([x, y] \subset \bar{B}(0, a+b) \setminus \bar{B}(0, a)) \Rightarrow \|x - y\| \leq 2\sqrt{b^2 + 2ba}$$

التمرين 4. ليكن $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle_E)$ و $(F, \langle \cdot, \cdot \rangle_F)$ فضاءي جداء سلمي على الحقل نفسه. وليكن

$f: E \rightarrow F$ تطبيقاً يحقق الشرطين:

$$\forall (x, y) \in E \times E, \quad \|f(x) - f(y)\|_F = \|x - y\|_E \quad \text{و} \quad f(0) = 0$$

أثبت أن التطبيق f خطي. (اعتبر منتصف القطعة $[x, y]$).

التمرين 5. ليكن $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ فضاء جداء سلمي. أياً كان $(x, y) \in E \times E$ نضع

$$d(x, y) = \frac{\|x - y\|}{\sqrt{1 + \|x\|^2} \sqrt{1 + \|y\|^2}}$$

نريد أن نثبت أن $\forall (x, y, z) \in E^3, d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$.

1. أثبت أن $\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2, \forall (u, v) \in E^2, \|u\| = \|v\| = 1 \Rightarrow \|\lambda u - \mu v\| = \|\lambda v - \mu u\|$.

2. أثبت أن $\forall (x, y) \in (E \setminus \{0\})^2, \left\| \frac{y}{\|y\|^2} - \frac{x}{\|x\|^2} \right\| = \frac{\|x - y\|}{\|x\| \|y\|}$.

3. نتأمل الفضاء $\tilde{E} = E \times \mathbb{K}$ مزوداً بالجداء السلمي $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\tilde{E}}$ المعروف كما يلي:

$$\langle (x, \alpha), (y, \beta) \rangle_{\tilde{E}} = \langle x, y \rangle + \bar{\alpha} \beta$$

كما نتأمل التطبيق $f: E \rightarrow \tilde{E}, x \mapsto (x, 1)$. عبّر عن $d(x, y)$ بدلالة $f(x)$ و $f(y)$ ثم استنتج المطلوب.

التمرين 6. ليكن $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ فضاء الجداء السلمي $\mathbb{R}[X]$ مزوداً بالجداء السلمي

$$\langle P, Q \rangle = \int_0^1 P(t)Q(t) dt$$

عَنِ الإسقاط القائم لـ E على الفضاء الشعاعي الجزئي F المؤلف من كثيرات الحدود التي لا تزيد درجتها عن 3 وتقبل 0 و 1 جذوراً لها. ثم احسب مسافة X عن F .

التمرين 7. ليكن $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ فضاء جداء سلمي، وليكن (e_1, \dots, e_n) أساساً متعامداً نظامياً

لـ E . ولكن (x_1, \dots, x_n) جملة أشعة من E تحقق $\sum_{k=1}^n \|e_k - x_k\|^2 < 1$. أثبت أن

الجملة (x_1, \dots, x_n) أساس للفضاء E .

التمرين 8. ليكن $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ فضاء جداء سلمي على الحقل \mathbb{R} ، ولكن (e_1, \dots, e_n) جملة

أشعة من E . نفترض أن

$$\forall (i, j) \in \mathbb{N}_n^2, i \neq j \Rightarrow \langle e_i, e_j \rangle < 0$$

$$\exists x \in E, \forall i \in \mathbb{N}_n, \langle x, e_i \rangle > 0$$

أثبت أن الجملة (e_1, \dots, e_n) حرة.

التمرين 9. ليكن $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ فضاء جداء سلمي. وليكن p إسقاطاً على E ، أي تطبيقاً خطياً يحقق $p^2 = p$ ، أثبت تكافؤ الخواص التالية:

1. التطبيق p هو إسقاط قائم.

2. $p^* = p$.

3. $\ker p \subset (\operatorname{Im} p)^\perp$.

4. $\forall x \in E, \|p(x)\| \leq \|x\|$.

التمرين 10. لتكن $A = (a_{ij})$ مصفوفة موجبة من المرتبة n . أثبت أن

$$\forall (X, Y) \in (M_{n,1}(\mathbb{R}))^2, |X^*AY|^2 \leq (X^*AX)(Y^*AY)$$

$$\text{واستنتج أن } \sup_{1 \leq i, j \leq n} |a_{ij}| = \sup_{1 \leq i \leq n} a_{ii}$$

التمرين 11. لتكن A_1 و A_2 مصفوفتين هرميتيتين من المرتبة n . أثبت أن A_1A_2 هرميتية

إذا، وفقط إذا، كان $A_1A_2 = A_2A_1$.

التمرين 12. لتكن $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4) \in \mathbb{R}^4$. نضع $A = \begin{bmatrix} \lambda_1 - \lambda_2 & \lambda_3 + \lambda_4 \\ \lambda_3 - \lambda_4 & \lambda_1 + \lambda_2 \end{bmatrix}$. أثبت أنه

إذا كان $\lambda_1 < 0$ و $1 = \det(A)$ كانت المصفوفة A معرفة موجبة.

التمرين 13. لتكن $(a_{ij}) = O$ مصفوفة متعامدة من المرتبة n . أثبت المتراجحتين:

$$\left| \sum_{1 \leq i, j \leq n} a_{ij} \right| \leq n \quad \text{و} \quad \sum_{1 \leq i, j \leq n} |a_{ij}| \leq n\sqrt{n}$$

التمرين 14. ليكن $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ فضاء جداء سلمي منتهي البعد، و P إسقاط عمودي على E ،

و (e_1, \dots, e_n) أساس متعامد نظامي في E . أثبت أن $\|P(e_k)\|^2 = \operatorname{rg}(P)$.

التمرين 15. ليكن $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ فضاء جداء سلمي منتهي البعد، وليكن $T \in \mathcal{L}(E)$. أثبت أن

$$(\operatorname{Ker} T)^\perp = \operatorname{Im} T^* \quad \text{و} \quad (\operatorname{Im} T)^\perp = \operatorname{Ker} T^*$$

التمرين 16. ليكن $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ فضاءً إقليدياً.

1. ليكن $u \in \mathcal{L}(E)$. أثبت أن تطبيق الخطي u^* متناظر و قيمه الذاتية موجبة. سنرمز

فيما يلي بـ λ_{\min} إلى أصغر قيمة ذاتية لـ u^* ، و بـ λ_{\max} إلى أكبر قيمة ذاتية له.

2. ليكن $u \in \mathcal{L}(E)$. أثبت أن $\|u(x)\|^2 \leq \lambda_{\max}(u) \|x\|^2 \leq \lambda_{\min}(u) \|x\|^2$ ، $\forall x \in E$.

3. ليكن u و v من $\mathcal{L}(E)$. أثبت أن

$$\forall v \in \text{sp}(u \circ v), \quad \lambda_{\min}(u) \lambda_{\min}(v) \leq |v|^2 \leq \lambda_{\max}(u) \lambda_{\max}(v)$$

التمرين 17. ليكن $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ فضاءً جداءً سلمي منتهي البعد، وليكن $u \in \mathcal{L}(E)$. نزود

$\mathcal{L}(E)$ بنظم التطبيقات الخطية المستمرة على E .

I. أثبت أن $\|u^*\| = \|u\|$.

II. نفترض أن $\|u\| \leq 1$.

1. أثبت أن $\ker(I - u) = \ker(I - u^*)$.

2. نعرف $F_2 = \ker(I - u)$ و $F_1 = \ker(I - u^*)$. أثبت أن $F_2^\perp = F_1$.

3. أيأ كان $1 \leq k$ ، نضع $u_p = \frac{1}{p} \sum_{k=0}^{p-1} u^k$. أثبت أن المتتالية $(u_p(x))_{p \in \mathbb{N}}$ تتقارب

نحو المسقط القائم لـ x على F_1 ، وذلك أيأ كان $x \in E$.

التمرين 18. لتكن $A \in M_n(\mathbb{R})$ مصفوفة متناظرة. أثبت أن :

$$(\exists k \in \mathbb{N}^*, A^k = I_n) \Rightarrow A^2 = I_n$$

التمرين 19. ليكن $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ فضاءً إقليدياً بعده 3 منسوباً إلى جملة متعامدة نظامية مباشرة

$\mathcal{B} = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. وليكن R الدوران بزواية قدرها θ حول المحور الموجّه بشعاع الواحدة

$\vec{\ell}$.

1. اكتب، باستخدام طريقة تغيير الأساس، مصفوفة R بالأساس \mathcal{B} . ثم أنجز الحساب حين

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{i} + \vec{j}) = \vec{\ell} \quad \text{و} \quad \frac{\pi}{3} = \theta$$

2. أثبت أن $\vec{\ell} \perp \vec{x} \Rightarrow R(\vec{x}) = \cos \theta \vec{x} + \sin \theta \vec{\ell} \wedge \vec{x}$

3. أثبت كذلك أن $\vec{\ell} \wedge \vec{x} = (1 - \cos \theta) \vec{\ell} + \sin \theta \vec{x}$ ، $\forall \vec{x} \in E$.

التمرين 20. ليكن E فضاءً إقليدياً بُعدُه 3 منسوباً إلى جملة متعامدة نظامية مباشرة. عَيِّن

الطبيعة الهندسية للتحويلات الخطية على E الممثلة بالمصفوفات التالية:

$$A = \frac{1}{7} \begin{bmatrix} -2 & 6 & -3 \\ 6 & 3 & 2 \\ -3 & 2 & 6 \end{bmatrix}, \quad B = \frac{1}{9} \begin{bmatrix} 8 & 1 & -4 \\ -4 & 4 & -7 \\ 1 & 8 & 4 \end{bmatrix}, \quad C = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & 2 \end{bmatrix}$$

التمرين 21. مُهدف في هذا المسألة إلى إثبات بعض خواص كثيرات حدود Legendre.

• نرسم بالرمز $C([-1,1])$ إلى فضاء التوابيع الحقيقية المستمرة على $[-1, +1]$ ، وبالرمز

$C^k([-1,1])$ ، حيث $k \geq 1$ ، إلى الفضاء الجزئي المؤلف من التوابيع الحقيقية التي تقبل

الاشتقاق باستمرار k مرة على $[-1, +1]$.

• نزود الفضاء $C([-1,1])$ بالجداء السلمي والنظيم الموافق له والمعرفين بالعلاقين التاليين

أيما كان f و g من $C([-1,1])$:

$$(1) \quad \|f\| = \left(\int_{-1}^1 |f(x)|^2 dx \right)^{1/2} \quad \text{و} \quad \langle f, g \rangle = \int_{-1}^1 f(x)g(x) dx$$

• أيما كان $n \in \mathbb{N}$ نرمز بالرمز $\mathcal{R}_n[X]$ إلى فضاء كثيرات الحدود المحدود الحقيقية التي لا تزيد

درجتها عن n ، ونطابق بين كثيرات الحدود هذه وبين التوابيع المحدودية في $C([-1,1])$.

• إذا كان $f \in C^2([-1,1])$ فإننا نعرف $L(f) \in C([-1,1])$ بالعلاقة

$$L(f)(x) = \frac{d}{dx} \left((x^2 - 1) \frac{df(x)}{dx} \right)$$

• وأخيراً نضع $U_0(X) = P_0(X) = 1$ ، وحين يكون $1 \leq n$ نعرف

$$P_n(X) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n U_n(X)}{dX^n} \quad \text{و} \quad U_n(X) = (X^2 - 1)^n$$

I

1. a. أثبت أنه أيما كان $n \in \mathbb{N}$ و $P \in \mathcal{R}_n[X]$ يَكُن لدينا $L(P) \in \mathcal{R}_n[X]$. نرمز إذن

بالرمز L_n إلى التطبيق الخطي $L_{\mathcal{R}_n[X]}$ أي التطبيق:

$$L_n : \mathcal{R}_n[X] \rightarrow \mathcal{R}_n[X] : P \mapsto L(P)$$

b. اكتب M_n مصفوفة التطبيق الخطي L_n بالنسبة إلى الأساس القانوني $(1, X, \dots, X^n)$

في $\mathcal{R}_n[X]$.

c. عَيِّن القيم الذاتية لـ L_n . هل يقبل L_n التمثيل بمصفوفة قطرية؟

2. a. أثبت أنه مهما تكن $\mathbb{N} \ni n$ لدينا $P_n(-X) = (-1)^n P_n(X)$.
 b. أثبت أن $\deg P_n = n$ ، وإذا كان α_n هو ثابت X^n في كثير الحدود P_n ، فأثبت أن

$$\frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} = \frac{2n+1}{n+1}$$

- c. أثبت، باستخدام عبارة مناسبة للمقدار $\left((X-1)^n (X+1)^n \right)$ ، أن $P_n(1) = 1$.
 d. عيّن كلا من P_1 و P_2 .
 3. تحقق صحة العلاقات التاليتين أيّا كانت $\mathbb{N} \ni n$:

$$\begin{aligned} U'_{n+1}(X) - 2(n+1)XU_n(X) &= 0, \\ (X^2 - 1)U'_n(X) - 2nXU_n(X) &= 0. \end{aligned}$$

ثم أثبت باشتقاق كل منهما مرة $n+1$ أن

$$(2) \quad P'_{n+1}(X) = XP'_n(X) + (n+1)P_n(X)$$

$$(3) \quad L(P_n) = n(n+1)P_n$$

4. عيّن أساساً لـ $\mathbb{R}_n[X]$ مؤلفاً من أشعة ذاتية لـ L_n .

5. a. أثبت، أيّا كانت $1 \leq n$ ، أن التابع

$$f_n: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}: f_n(x) = [P_n(x)]^2 + \frac{1-x^2}{n(n+1)} [P'_n(x)]^2$$

تابع متزايد.

- b. استنتج أن $\forall x \in [-1,1], |P_n(x)| \leq 1$.
 (4)

II

1. a. أثبت أنه أيّا كان $\mathbb{N} \ni n$ و $f \in C^2([-1,1])$ فلدينا

$$\langle L(f), P_n \rangle = \langle f, L(P_n) \rangle = n(n+1) \langle f, P_n \rangle$$

- b. أثبت بحساب كل من $\langle L(P_n), P_m \rangle$ و $\langle P_n, L(P_m) \rangle$ أن $\langle P_n, L(P_m) \rangle = 0$ $\Leftrightarrow n \neq m$

- c. أثبت أن

$$(5) \quad 0 = \langle P_n, X^k \rangle \Leftrightarrow \{0, 1, \dots, n-1\} \ni k$$

2. a. أثبت أنه مهما تكن $n \in \mathbb{N}$ ، فلدينا $\frac{1}{\alpha_n} \int_{-1}^1 P'_{n+1}(x) P_n(x) dx = (n+1) \|P_n\|^2$.
 مساعدة: ما درجة كثير الحدود $P'_{n+1}(x) - (n+1) \frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} P_n(x)$ ؟
 b. أثبت من ناحية أخرى أن $\int_{-1}^1 P'_{n+1}(x) P_n(x) dx = 2$ ، واستنتج أن $\|P_n\|^2 = \frac{2}{2n+1}$.
 3. أثبت أن جماعة كثيرات الحدود $(\tilde{P}_n)_{n \geq 0}$ المعرفة بالعلاقة $\tilde{P}_n = \sqrt{\frac{2n+1}{2}} P_n$ تكون جماعة متعامدة نظامية بالنسبة إلى الجداء السلمي الذي عرفناه على $C([-1,1])$ ، وأن الجماعة $(\tilde{P}_0, \tilde{P}_1, \dots, \tilde{P}_n)$ أساس متعامد نظامي لـ $\mathbb{R}_n[X]$.
 4. أثبت أن

$$(6) \quad \forall P \in \mathbb{R}_n[X], \quad \|L(P)\| \leq n(n+1) \|P\|$$

مساعدة: عبّر عن P بدلالة الأساس السابق.

III

1. a. نعرف، حين يكون $1 \leq n$ ، ما يلي: $Q_n(X) = (n+1)P_{n+1}(X) - (2n+1)XP_n(X)$.
 أثبت أن $Q_n \in \mathbb{R}_n[X]$ ، واحسب $Q_n(1)$ ، وبين أيكون Q_n فردياً أم زوجياً ؟
 b. أثبت باستخدام العلاقة (5) أن
 $0 = \langle XP_n, P_k \rangle = \langle P_n, XP_k \rangle \Leftrightarrow \{0, 1, \dots, n-2\} \ni k$.
 c. استنتج مما سبق وجود عددين حقيقيين λ و μ بحيث
 $Q_n(X) = \lambda P_n(X) + \mu P_{n-1}(X)$.
 d. استعمل نتائج السؤال 1. a. لتثبت أن $\lambda = 0$ و $\mu = -n$ ، ومن ثم:
 $(n+1)P_{n+1}(X) - (2n+1)XP_n(X) + nP_{n-1}(X) = 0$ (7)
 e. استنتج أن
 $P_{2n}(0) = (-1)^n \frac{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot \dots \cdot (2n)}$

2. نضع $W_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n \theta d\theta$. أثبت أن المتتالية $(W_n)_{n \geq 0}$ متناقصة، ثم أوجد علاقة تكرارية

بين W_n و W_{n-2} حين يكون $2 \leq n$ ، واستنتج أن المتتالية $(nW_n W_{n-1})_{n \geq 1}$ ثابتة. وأخيراً احسب W_{2n} واستنتج أن $\|P_{2n}(0)\| \leq \frac{1}{\sqrt{\pi n}}$ ، $\forall n \geq 1$.

3. تحقق أن $0 = (2n+1)P_{2n}(0) + (2n+2)P_{2n+2}(0)$ أيأ كان $0 \leq n$. واستنتج باستخدام العلاقة (2) أن

$$\|P'_{2n+1}(0)\| \leq 2\sqrt{\frac{n+1}{\pi}}$$

4. a. ليكن، عندما $1 \leq n$ ، التابع

$$\alpha_n : [-1, +1] \rightarrow \mathbb{R}, \alpha_n(x) = \sqrt{1-x^2} P_n(x)$$

أثبت أنه أيأ كان $x \in]-1, +1[$ فإن $\alpha'_n(x) + x P_n(x) + (x^2 - 1) P'_n(x) = 0$

ثم استخدم العلاقة (3) لحبت أن $\alpha''_n(x) + \varphi_n(x) \alpha_n(x) = 0$ حيث

$$\varphi_n(x) = \frac{1}{1-x^2} \left(n(n+1) + \frac{1}{1-x^2} \right)$$

b. ليكن التابع $\beta_n : [-1, +1] \rightarrow \mathbb{R}, \beta_n(x) = [\alpha_n(x)]^2 + \frac{[\alpha'_n(x)]^2}{\varphi_n(x)}$. أثبت أن β_n تابع

زوجي و متناقص على المجال $[0, 1]$.

c. استخدم نتائج 2. و 3. لإثبات أن $\beta_n(0) \leq \frac{2}{\pi n}$. ومن ثم استنتج أن

$$(8) \quad \forall n \geq 1, \forall x \in]-1, +1[, \quad |P_n(x)| \leq \sqrt{\frac{2}{\pi n(1-x^2)}}$$

IV

ليكن $f \in C([-1, 1])$ ، ولتكن $0 \leq n$ نعرف $c_n(f) = \langle f, \tilde{P}_n \rangle$ و $S_n(f) = \sum_{k=0}^n c_k(f) \tilde{P}_k$

1. أثبت أن $S_n(f) - f$ عمودي على الفضاء الجزئي $\mathbb{R}_n[X]$ من $C([-1, +1])$ ، ثم استنتج

$$\sum_{k=0}^n (c_k(f))^2 \leq \|f\|^2$$

2. أثبت تقارب المتسلسلة $\sum_{n \geq 0} (c_n(f))^2$ ، وعين نهاية المتتالية $(c_n(f))_{n \geq 0}$.

3. a. نفترض أن $f \in C^2([-1,1])$ ، و نضع $g = L(f)$. غير عن $c_n(g)$ بدلالة $c_n(f)$ ثم

استنتج، أنه لدينا $\lim_{n \rightarrow \infty} n(n+1)c_n(f) = 0$

b. أثبت أن المتسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(f) \tilde{P}_n$ تتقارب بانتظام على $[-1, +1]$ نحو تابع مستمر

$\tilde{f} \in C([-1, +1])$. استخدم (4).

c. أثبت أن $\langle f - \tilde{f}, \tilde{P}_n \rangle = 0$ ، $\forall n \geq 0$ ، واستخدم مبرهنة Wierstrass بعد أن

تذكرها لتستنتج أن $f = \tilde{f}$.

4. أثبت، باستخدام العلاقة (7)، أنه أيما كان $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ و أيما كان $0 \leq n$ فإن

$$\sum_{k=0}^n (2k+1)P_k(x)P_k(y)(x-y) = (n+1)(P_{n+1}(x)P_n(y) - P_n(x)P_{n+1}(y))$$

نعرف، أيما كان $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ بحيث $x \neq y$ المقدار

$$K_n(x, y) = \frac{n+1}{2} \left(\frac{P_{n+1}(x)P_n(y) - P_n(x)P_{n+1}(y)}{x-y} \right)$$

5. أثبت أن $\int_{-1}^1 K_n(x, y) dy = 1$

6. a. نفترض أن $f \in C^1([-1,1])$ ، وأن $x \in [-1, +1]$. أثبت أن

$$S_n(f)(x) - f(x) = \int_{-1}^1 K_n(x, y)(f(y) - f(x)) dy$$

b. نعرف التابع :

$$g_x : [-1, +1] \rightarrow \mathbb{R} : g_x(y) = \begin{cases} (f(y) - f(x))/(y-x) & : y \neq x \\ f'(x) & : y = x \end{cases}$$

أثبت أن $g_x \in C([-1,1])$ ، وأنه، أيما كانت $1 \leq n$

$$S_n(f)(x) - f(x) = \frac{n+1}{2} \left(\sqrt{\frac{2}{2n+1}} c_n(g_x) P_{n+1}(x) - \sqrt{\frac{2}{2n+3}} c_{n+1}(g_x) P_n(x) \right)$$

c. استخدم (8) لتثبت أن المتسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(f) \tilde{P}_n$ تتقارب ببساطة على $[-1, +1]$ نحو

التابع $f|_{[-1,1]}$.



مراجع الكتاب

1. "*Cours de Mathématiques Spéciales, I,II.*",
E. RAMIS & C. DESCHAMPS & J. ODOUX, Masson, 1979.
2. "*Cours de Mathématiques du Premier Cycle*",
J. DIXMIER, Gautier-villars, 1977.
3. "*Cours de Mathématiques, Algèbre*",
J.M. ARNAUDIES, H. FRAYSSE, Dunod Université, 1986.
4. "*Analyse Linéaire dans les espaces de dimension finie*",
I. GLAZMAN, Y. LIUBITCH., Mir Publishers, Moscow 1974.
5. "*Algebra*",
S. LANG, Addison Wesley, 1971.

فهرس الرموز

يُبين الجدول التالي أرقام صفحات الكتاب التي ظهر فيها الرمز الموافق لأول مرة.

69	$\mathcal{L}_p(E_1, \dots, E_p; F), \mathcal{L}_p(E_1, \dots, E_p; \mathbb{K})$	3	$\mathbb{K}_n[X], \mathbb{K}^{(n)}, E^{(n)}, \sum_{i \in A} F_i$
70	$\mathcal{L}_p(E^p; F), \mathcal{L}_p^s(E^p; F), \mathcal{L}_p^A(E^p; F)$	4	$\sum_{k=1}^n F_k, \mathcal{L}(E, F), \ker u, \operatorname{Im} u$
73	$\det_G(x_1, \dots, x_n)$	5	$\mathcal{L}(E), \mathcal{G}\mathcal{L}(E), \operatorname{vect}((x_1, \dots, x_n))$
76	$\det u$	6	$\operatorname{vect}((x_i)_{i \in I})$
79	$\det M$	10....	$E_2 \oplus E_2, \bigoplus_{i \in I} E_i$
84	$\operatorname{con}(M)$	15....	$E/H, \mathcal{Q}_H$
89	$E_\lambda, \operatorname{sp}(u)$	24....	$\dim_{\mathbb{K}} E, \dim E$
101....	$X_n(X), m_\nu(\lambda)$	25....	$E \cong F$
102....	$\tau_k(M)$	27....	$\operatorname{codim}_E F$
103....	u_p	28....	$\operatorname{rg}((x_i)_{i \in I}), \operatorname{rg}(u)$
109....	$u^k, P(u)$	35....	$E^p, \langle f, x \rangle, x^\perp, A^\perp, y^*, B^*$
125....	$\langle x, y \rangle$	38....	${}^t u$
127. ..	$\{x\} \vdash Q, \dots$	47....	$\mathcal{M}_{n,p}(A), \mathcal{M}_n(A)$
128....	$\{x, y\}$	48....	$M \cdot N$
130....	M^*	50....	$\mathcal{G}\mathcal{L}_n(A), I_n, \dots, E_j$
131....	$\operatorname{Gram}(x_1, \dots, x_n)$	51....	$\mathcal{T}_n^L(\mathbb{K}), \mathcal{T}_n^U(\mathbb{K}), \mathcal{D}_n(\mathbb{K}), \operatorname{mat}(u, \mathcal{E}, \mathcal{F})$
134....	$x \perp y, x \perp B$	52....	$\mathcal{J}_{n,p,r}$
143....	P_F	55....	${}^t M, S_n(\mathbb{K}), \mathcal{A}_n(\mathbb{K})$
145....	$d(x, F)$	57....	$\operatorname{rg}(M), C_j(M), R_j(M)$
149....	$u^*, \ u\ , \ u^*\ $	59....	$P_{\mathcal{E}}^{\mathcal{F}}$
154....	$\mathcal{O}(E), \mathcal{O}^2(E), \mathcal{O}(n), \mathcal{O}^2(n), \mathcal{BON}, U_{\mathcal{E}, \mathcal{F}}$	61....	$A \approx B$
157....	$v_1 \wedge v_2, \{x_1, x_2, x_3\}$	62....	$A \equiv B$
160....	$\lambda_{\min}, \lambda_{\max}$	63....	$\operatorname{tr} A$
		64....	tru

المختصر

الفصل الأول

الفضاءات الشعاعية والتطبيقات الخطية

- 1.1.1. 1
- 2.1.1. 4
- 3.1.1. 5
- 4.1.1. 10
- 5.1.1. 15
- تمرينات 17

الفصل الثاني

الفضاءات الشعاعية المنتهية البعد

- 1.1.1. 21
- 2.1.1. 23
- 3.1.1. 28
- تمرينات 32

الفصل الثالث

التوترية في الفضاءات الشعاعية

- 1.1.1. 35
- 2.1.1. 38
- 3.1.1. 40
- تمرينات 43

الفصل الرابع

المصفوفات

1.IV	مفهوم المصفوفة	47
2.IV	العمليات على المصفوفات	48
3.IV	مصفوفة تطبيق خطّي	51
4.IV	رتبة مصفوفة	57
5.IV	تغيير الأساس	59
6.IV	أثر مصفوفة و أثر تطبيق خطّي	63
66	تمرينات	66

الفصل الخامس

المُحدّدات وجمل المعادلات الخطيّة

1.V	التطبيقات المتعدّدة الخطيّة	69
2.V	المُحدّدات	73
3.V	مُحدّد تطبيق خطّي من فضاء شعاعيّ إلى نفسه	76
4.V	مُحدّد مصفوفة مربعة	79
5.V	حساب المُحدّدات	80
6.V	جُمْل المعادلات الخطيّة	86
92	تمرينات	92

الفصل السادس

اختزال التطبيقات الخطيّة

1.VI	عموميّات	99
2.VI	التطبيقات الخطيّة القابلة للتمثيل بمصفوفات قطريّة	104
3.VI	التطبيقات الخطيّة القابلة للتمثيل بمصفوفات مثلثيّة	107
4.VI	كثيرات الحدود والتطبيقات الخطيّة	109
5.VI	تطبيقات	113
120	تمرينات	120

الفصل السابع
الفضاءات الشعاعية المزدوجة بجداء سلمي

125	1. VII الجداء السلمي
134	2. VI! التناهد في فضاءات الجداء السلمي
140	3. VII الإسقاط القائم
147	4. VII الأشكال الخطية والتطبيقات الخطية المرافقة
153	5. VII التطبيقات الخطية المتعامدة
159	6. VII اختزال التطبيقات الخطية المتناظرة
165	تربينات
175	مراجع الكتاب
177	فهرس الرموز
179	الفهرس



مطبعة دار البعث - دمشق

سعر المبيع للطالب (٨٥) ل.س